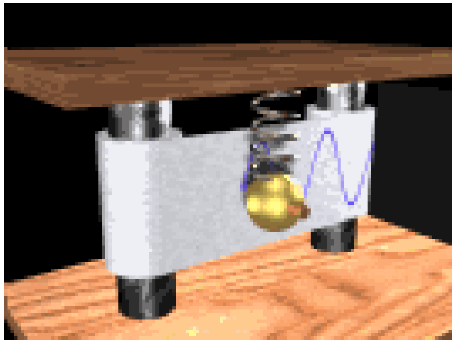
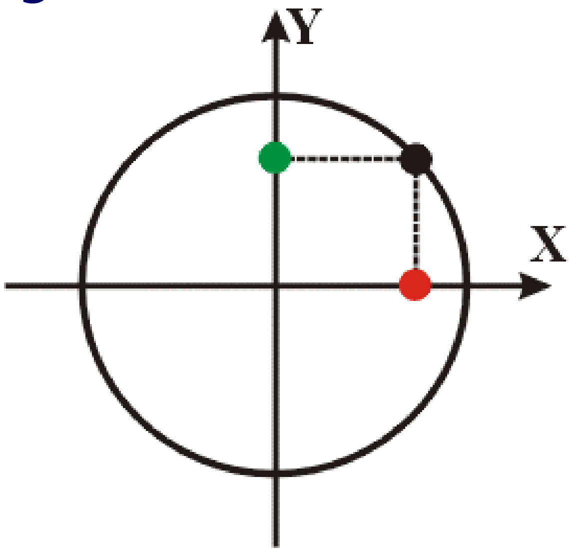
Aula do cap. 16
MHS e Oscilações





→ Movimento harmônico simples (MHS).
→ Equações do MHS soluções, x(t), v(t) e a(t).
→ Relações entre MHS e movimento circular uniforme.
→ Considerações de energia mecânica no movimento harmônico simples.
→ Noções sobre o movimento harmônico amortecido.
→ Aplicações do movimento harmônico simples e Ressonância.

Referência:

Halliday, David; Resnick, Robert & Walker, Jearl. Fundamentos de Física, Vol 2. Cap. 16 da 6ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996. Nº na biblioteca (53 H188ff).

Movimento Oscilatório

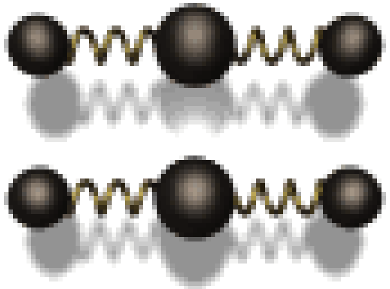
Sempre que um sistema sofre uma perturbação da sua posição de equilíbrio estável, ocorre um movimento de oscilação.

Modos de Oscilação

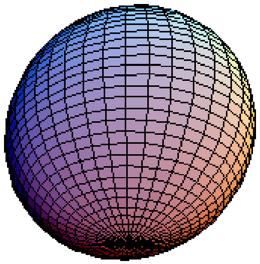
Torção

Oscilação

Modo Antissimétrico

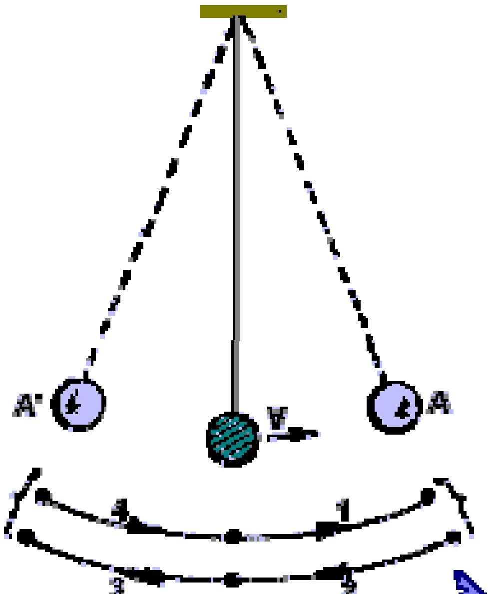


Modo Simétrico

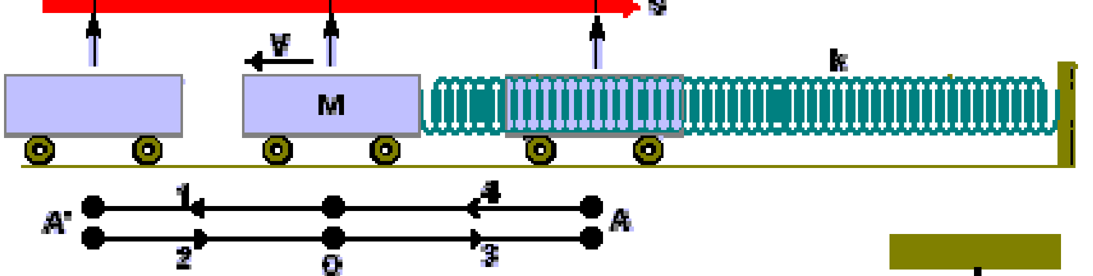


Exemplos de sistemas que executam MHS

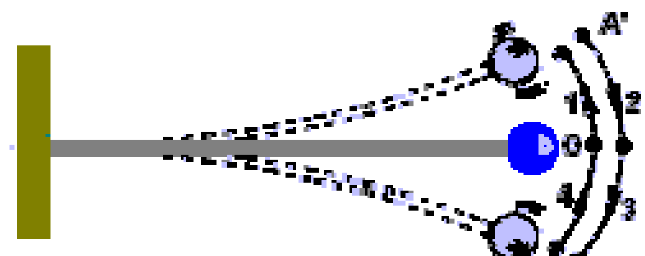
Modo Simétrico



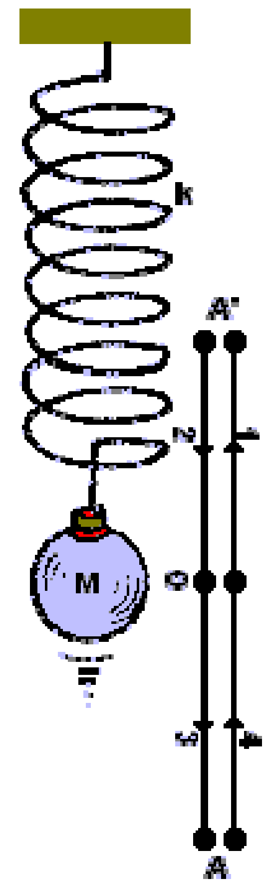
Movimento pendular



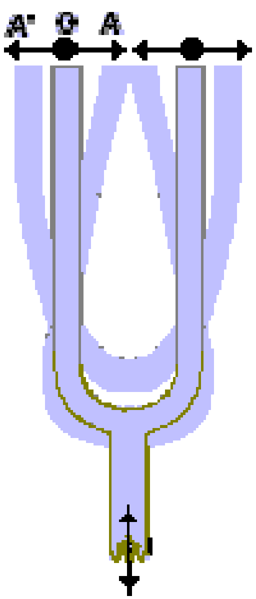
Bloco oscilante



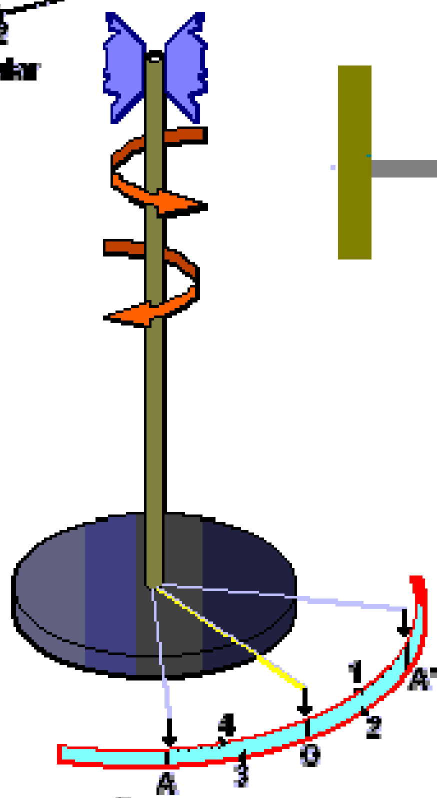
Lâmina vibrante



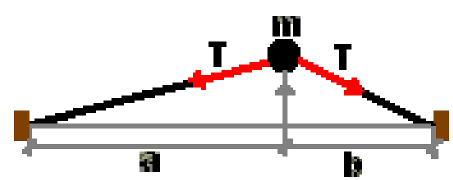
Pêndulo de mola



Diapasão

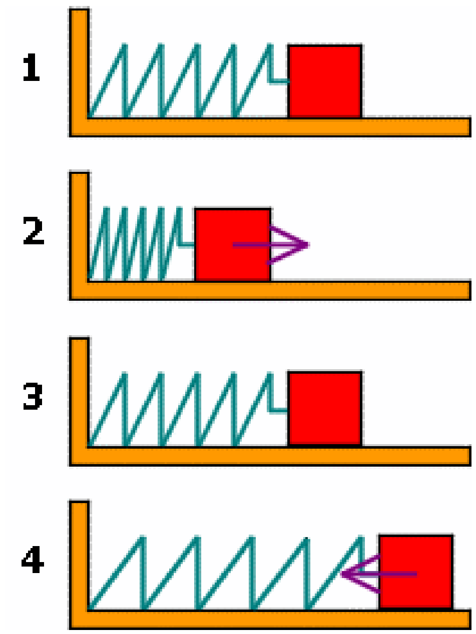


Oscilações torsionais



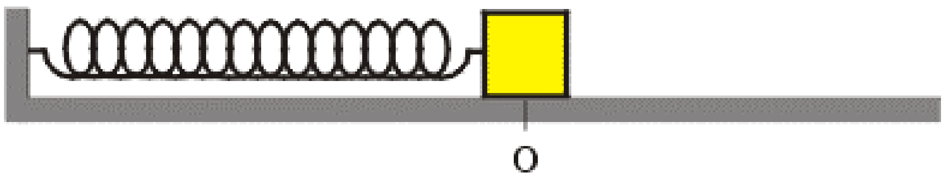
Sistema massa-corda

Oscilador massa-mola



O oscilador massa-mola é constituído de um corpo de massa **m** ligado a uma mola de constante elástica **k**, presa a uma parede. O corpo executa MHS sobre uma superfície horizontal sem atrito. Quando a mola é comprimida (ou esticada) e liberada, o corpo passa a executar um movimento unidimensional de vai-e-vem, dirigido pela força restauradora exercida pela mola:

F = - k x.



- Frequência , ***f*** – número de oscilações completadas por unidade de tempo (Hz, s^{-1}).
- Período, ***T*** – tempo necessário para completar uma oscilação (s). $T = \frac{1}{f}$
- Amplitude – deslocamento máximo em relação à posição de equilíbrio produzido pela oscilação.

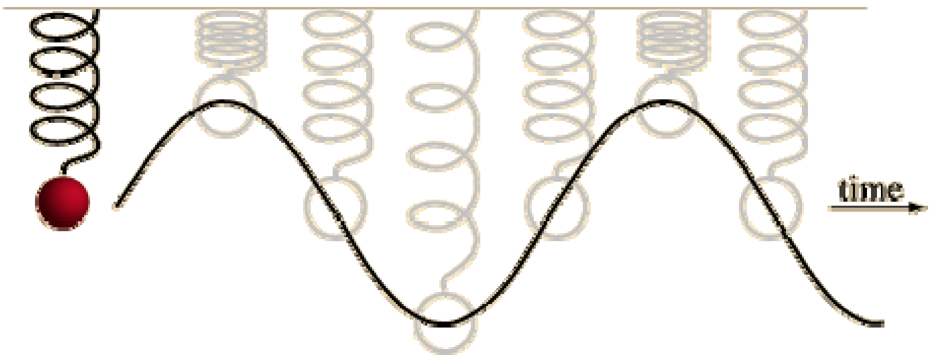
Oscilador Massa- mola

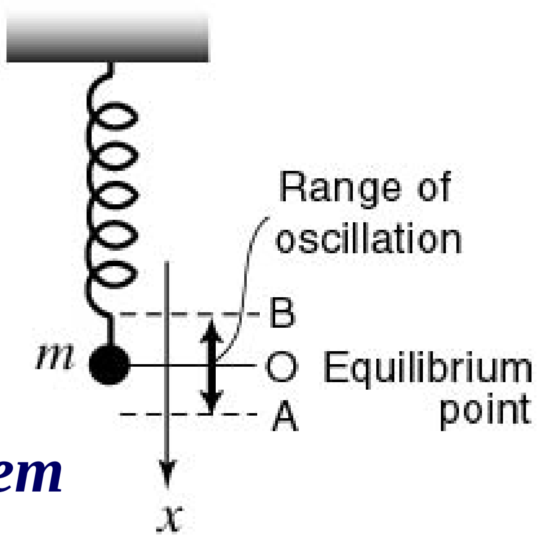
Características Principais:

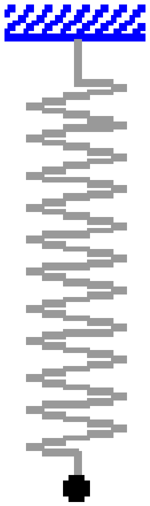
1. É periódico;

2. Ocorre sempre na presença de uma força restauradora;

3. Ocorre sempre ao redor do ponto de equilíbrio do sistema.



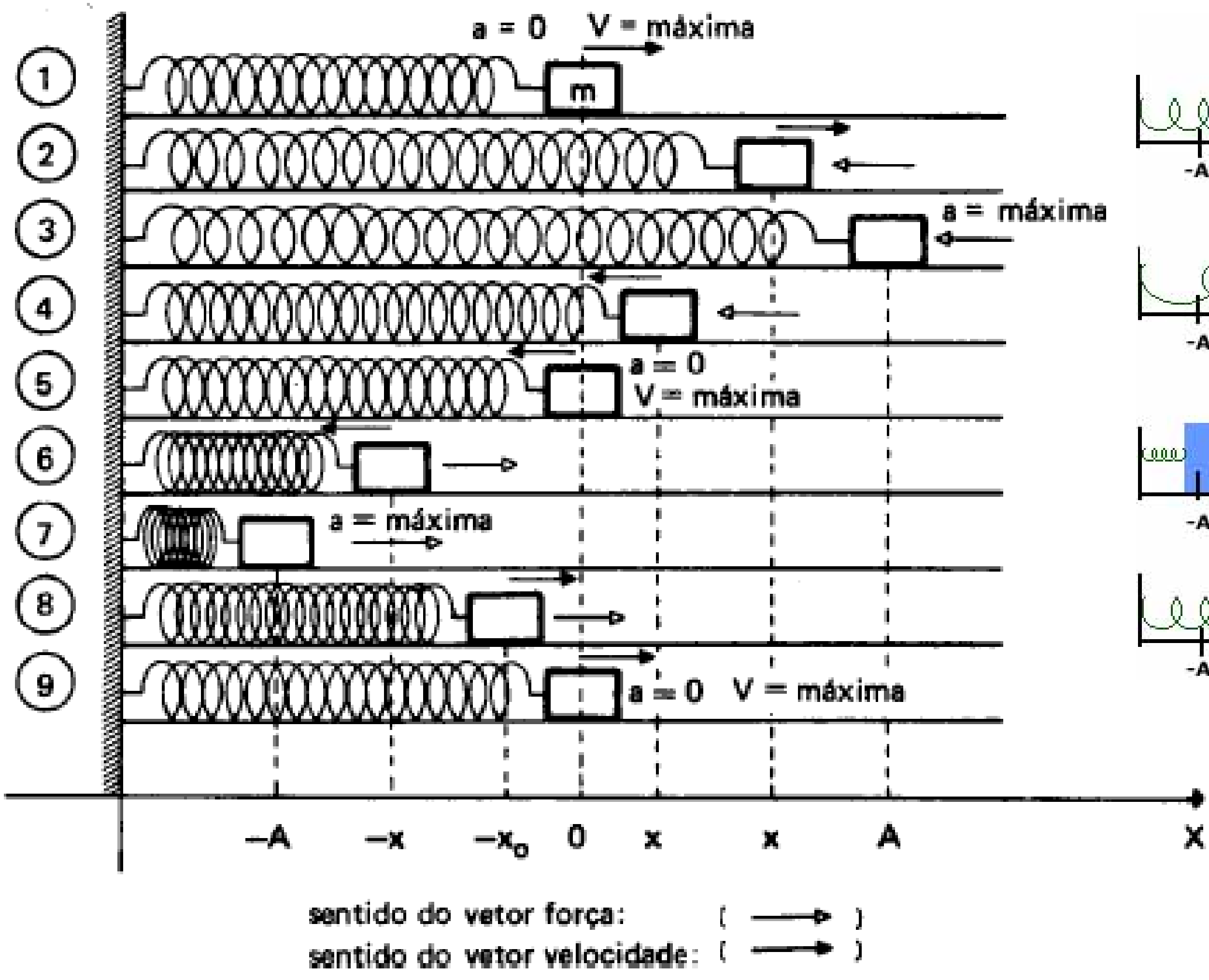


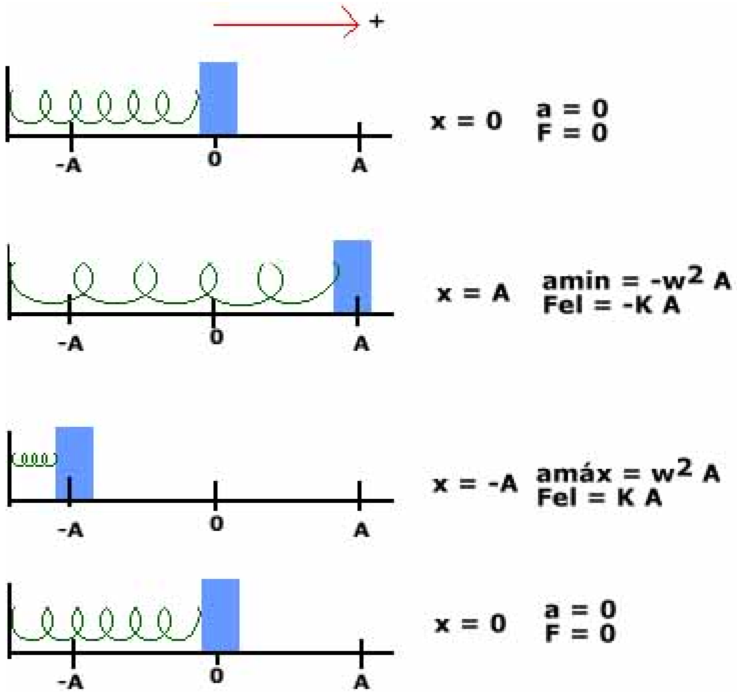


Quando um movimento se repete em intervalos de tempo regulares é chamado Movimento Harmónico Simples (MHS)

MHS

Análise Dinâmica do M.H.S. em todos os instantes do movimento.

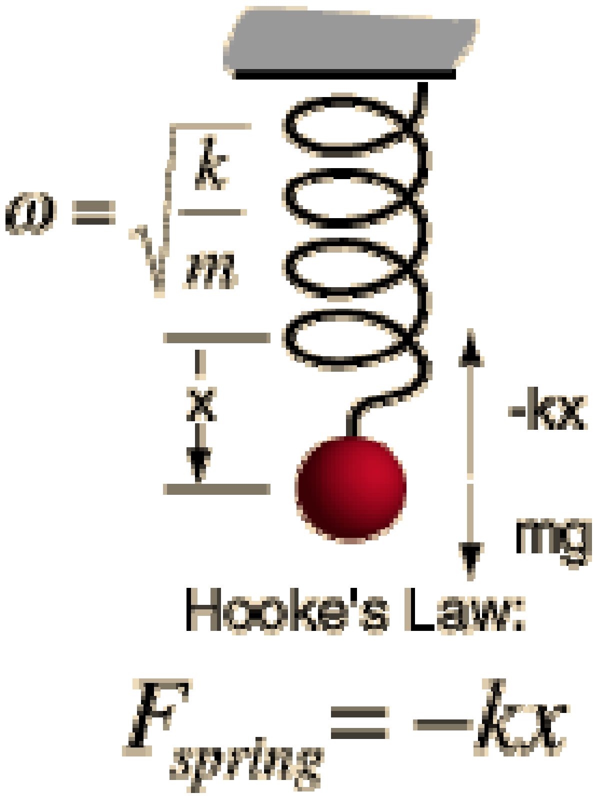




$$F = -k\,x$$

$$\Delta x = x - x_0 \text{ com } x_0 = 0$$

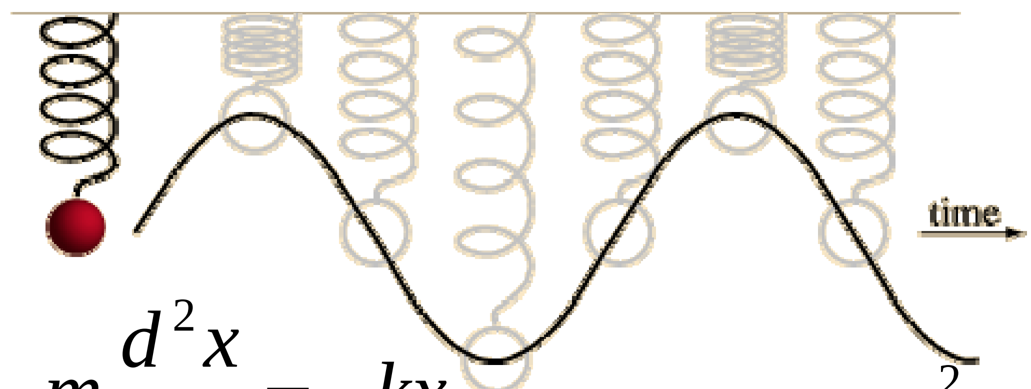
Período de oscilação:

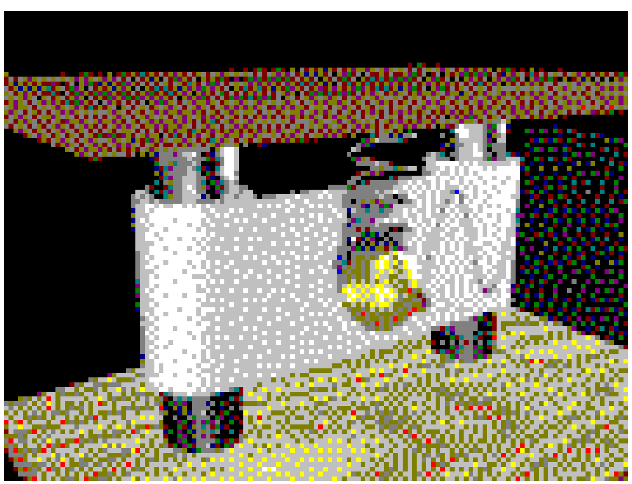


$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_e \qquad ma = -kx$$





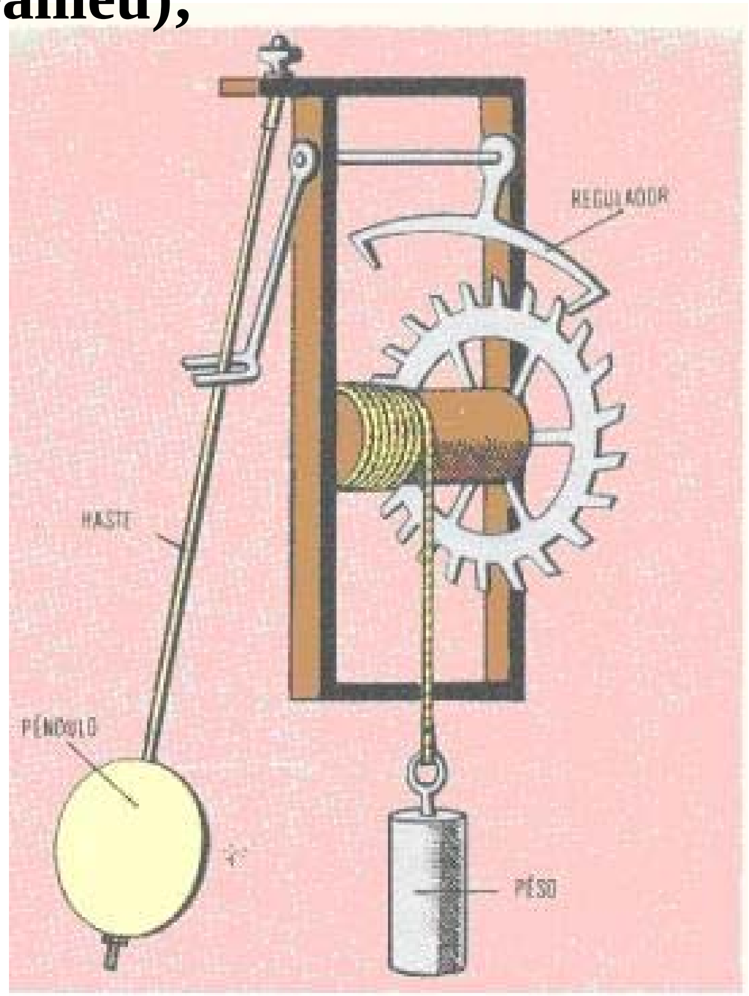
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

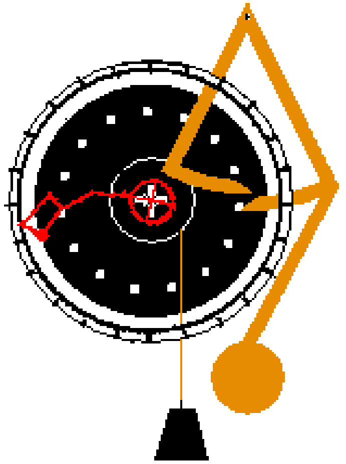
$$\omega^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Pêndulo Simples

Medição do Tempo (Galileu);

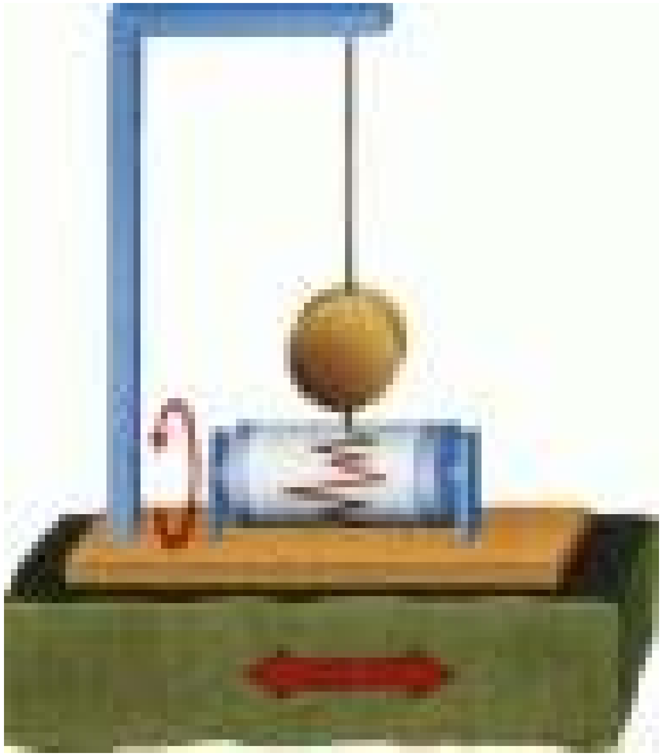


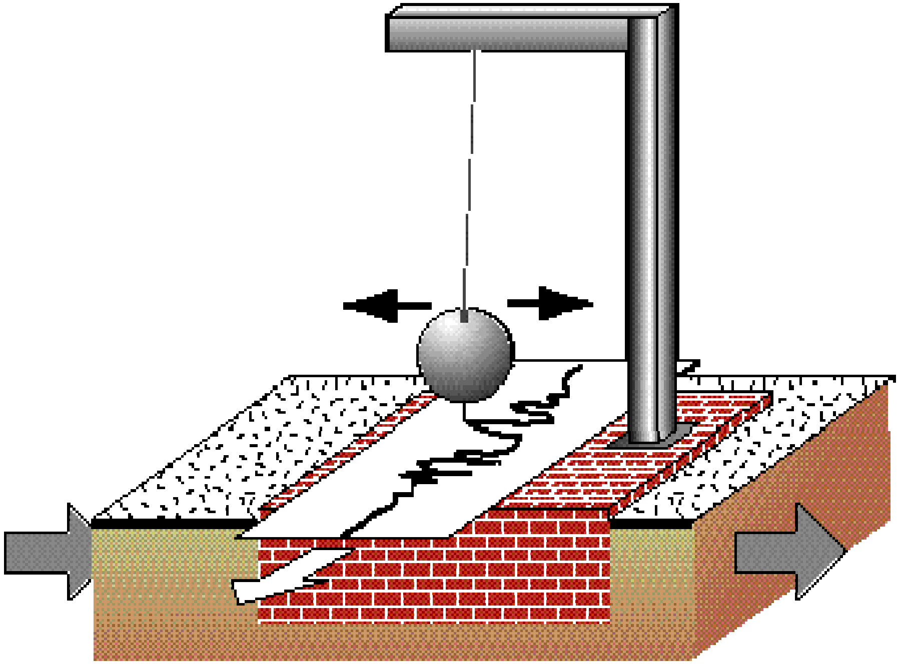


Sol, água, areia, pêndulo, quartzo e césio, são os principais meios de que o homem já utilizou para a contagem do tempo.

Pêndulo Simples - Aplicações

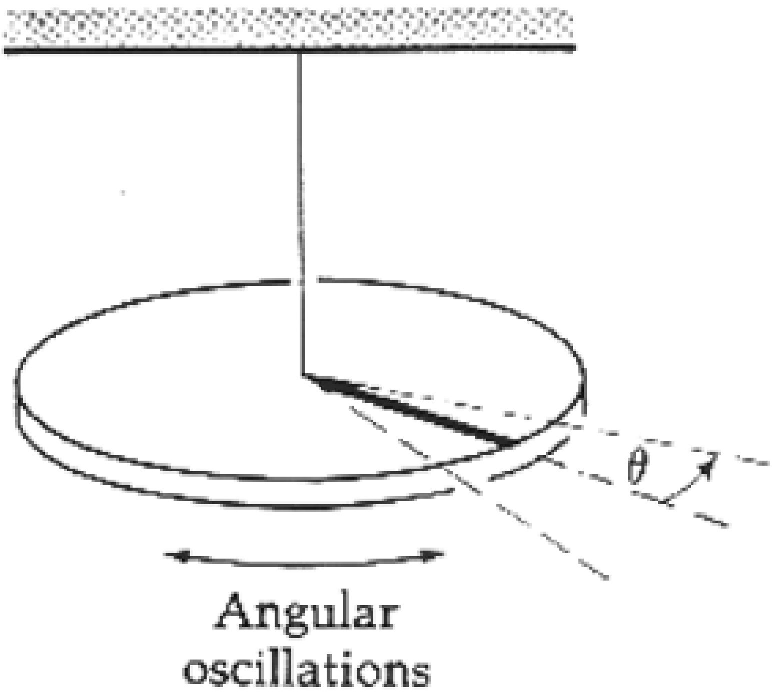
Sismógrafos:

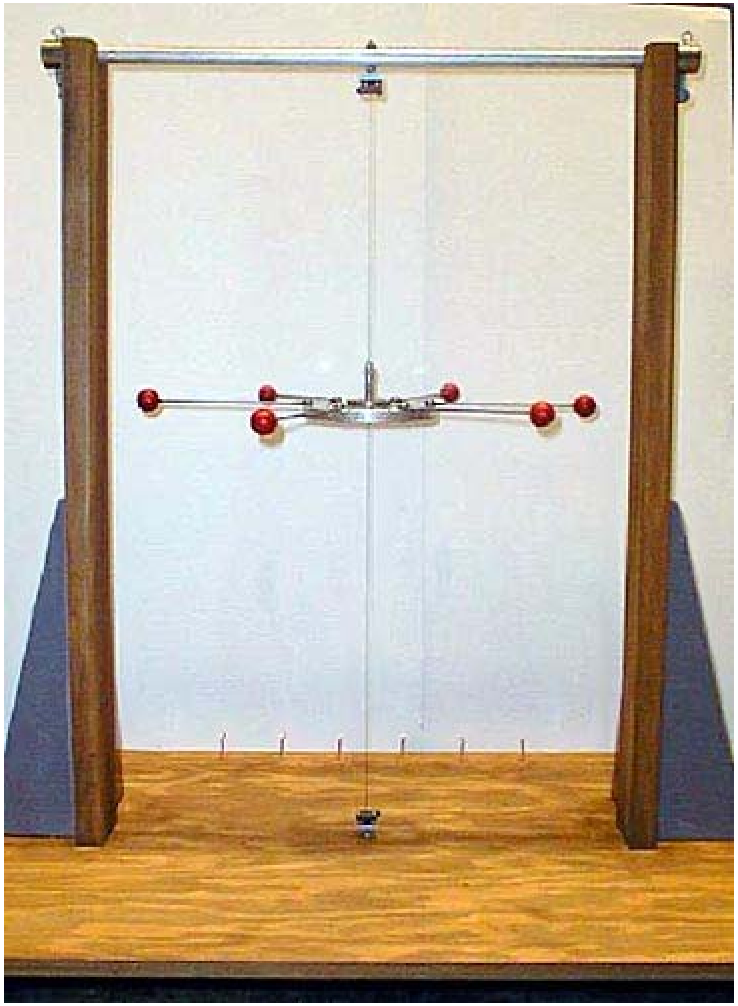




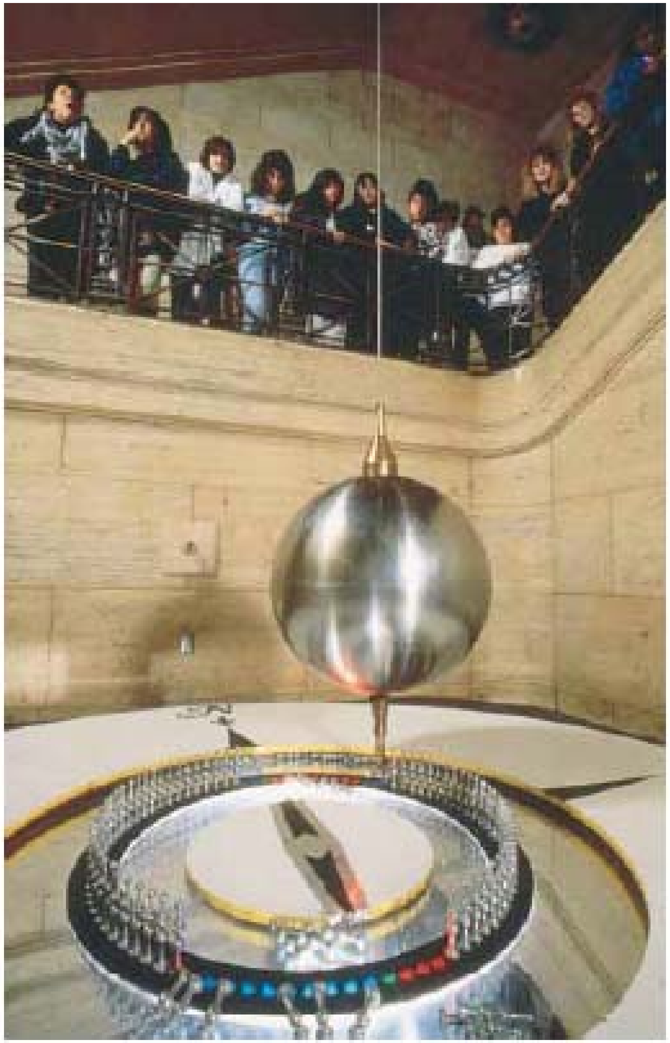
Pêndulos - Aplicações

Pêndulo de Torção:





The Foucault pendulum at the Franklin Institute in Philadelphia.

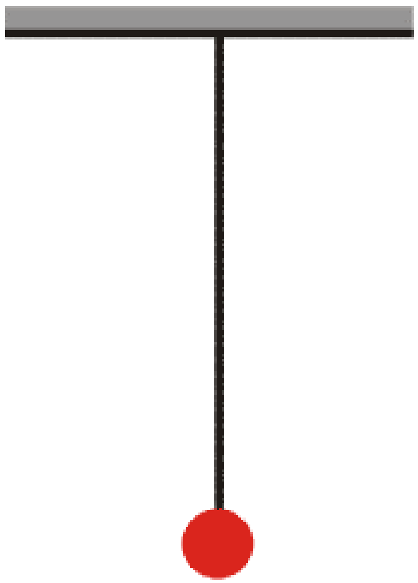


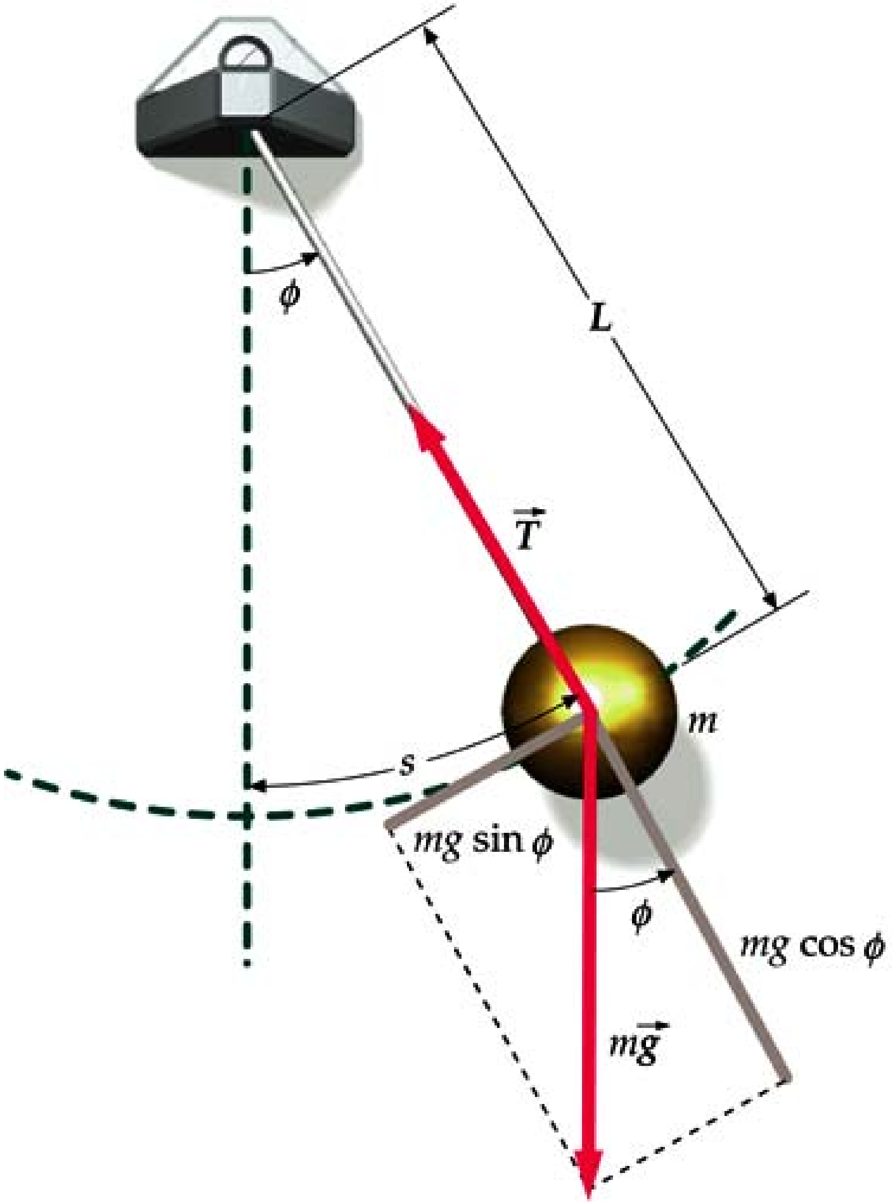
Um pêndulo de Foucault, assim chamado em referência ao físico francês Jean Bernard Léon Foucault, é uma experiência concebida para demonstrar a rotação da Terra em relação a um referencial. A primeira demonstração data de 1851, quando um pêndulo foi fixado ao teto do Panthéon de Paris. A originalidade do pêndulo reside no fato de ter liberdade de oscilação em qualquer direção, ou seja, o plano pendular não é fixo. A rotação do plano pendular é devida (e prova) a rotação da Terra. A velocidade e a direção de rotação do plano pendular permitem igualmente determinar a latitude do local da experiência.

Movimento Pendular - Pêndulo Simples

Força resultante no movimento de um pêndulo simples:

$$\mathbf{F_{restauradora} = - mg\ sen\theta}$$

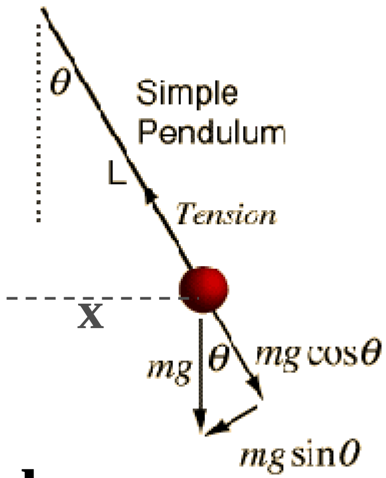




Movimento Pendular - Pêndulo Simples

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

$$\mathrm{sen}\theta = x/L$$



Força resultante no movimento de um pêndulo simples:

$$F_{restauradora} = -\,mg\,\mathrm{sen}\theta \qquad F_{rest} = -\,mg\,x/L$$

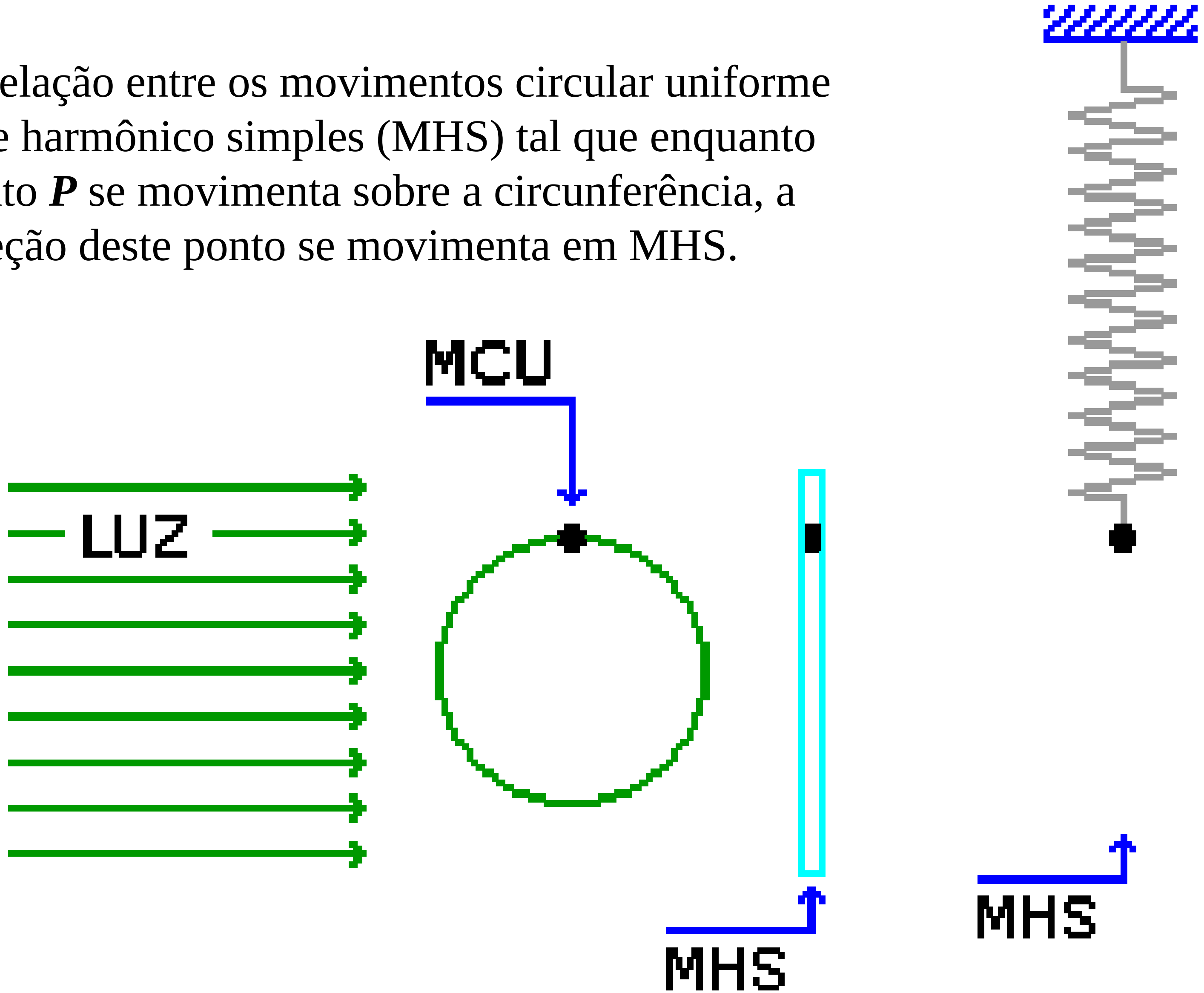
Com k = mg /L

Período de oscilação:

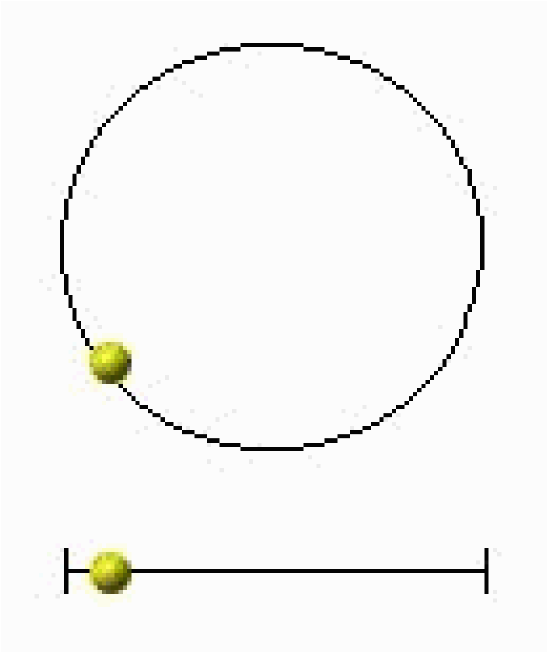
$$T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

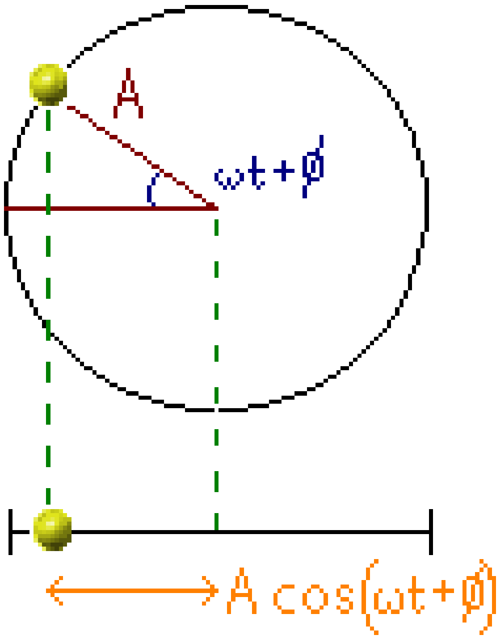
Relações entre MHS e movimento circular uniforme.

Há uma relação entre os movimentos circular uniforme (MCU) e harmônico simples (MHS) tal que enquanto um ponto ***P*** se movimenta sobre a circunferência, a projeção deste ponto se movimenta em MHS.



Relações entre MHS e movimento circular uniforme.

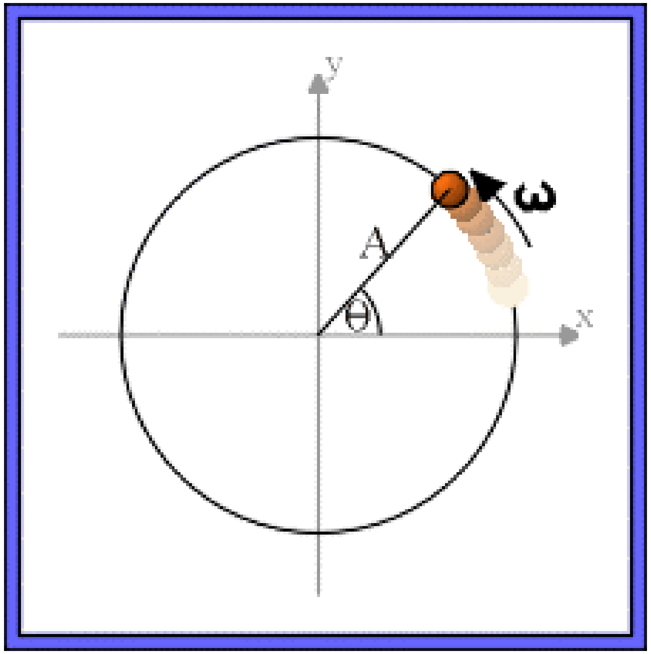


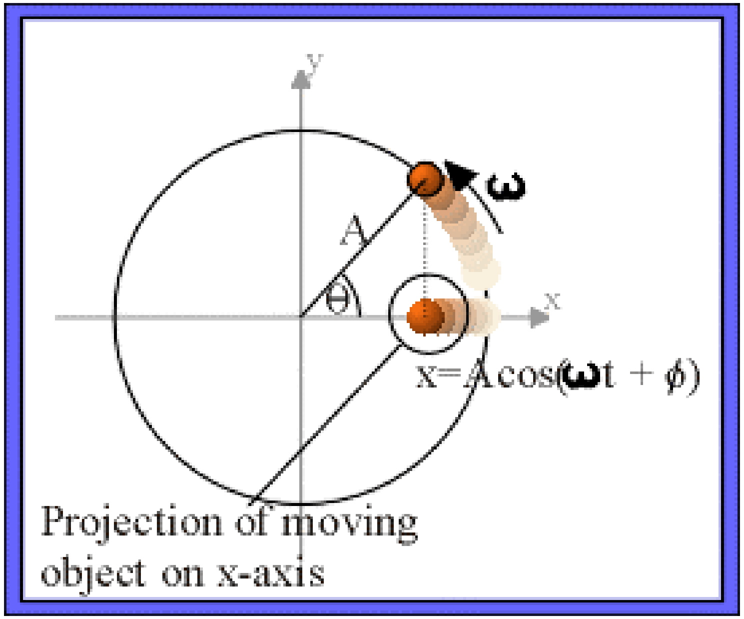


$$x\,(t) = x_m \cos\,(\omega\, t + \Phi_0\,)$$

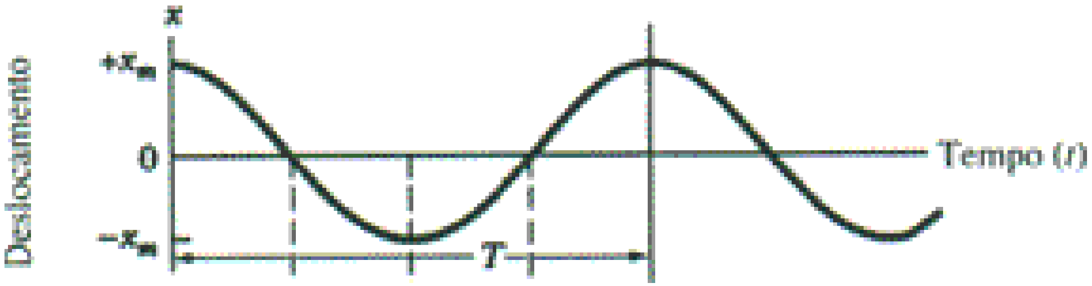
x_m = amplitude do movimento e, ω = velocidade angular ou freqüência angular e Φ_0 fase inicial do movimento.

Posição x (cm) em função do tempo.





$$x\,(t) = x_m \cos\,(\omega\, t + \Phi_0\,)$$

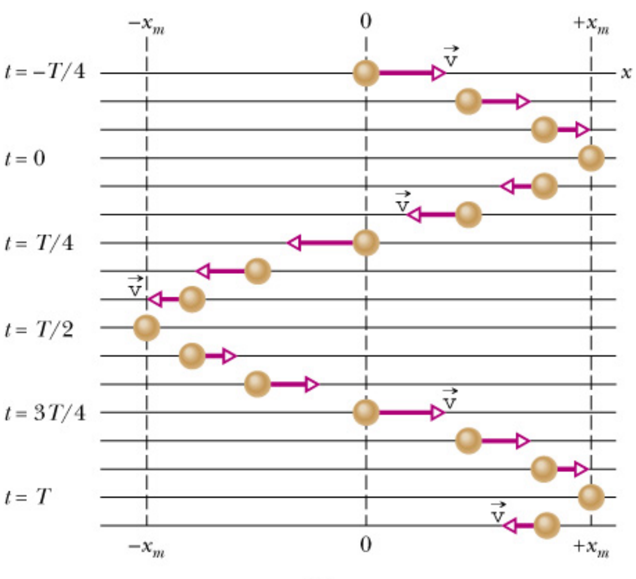


$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

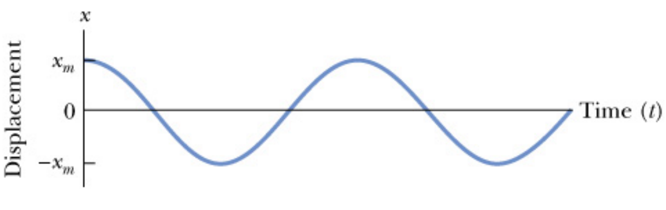
Movimento Harmônico Simples

- Velocidade de uma partícula a oscilar será dada por:

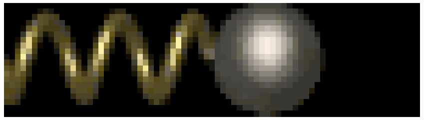
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

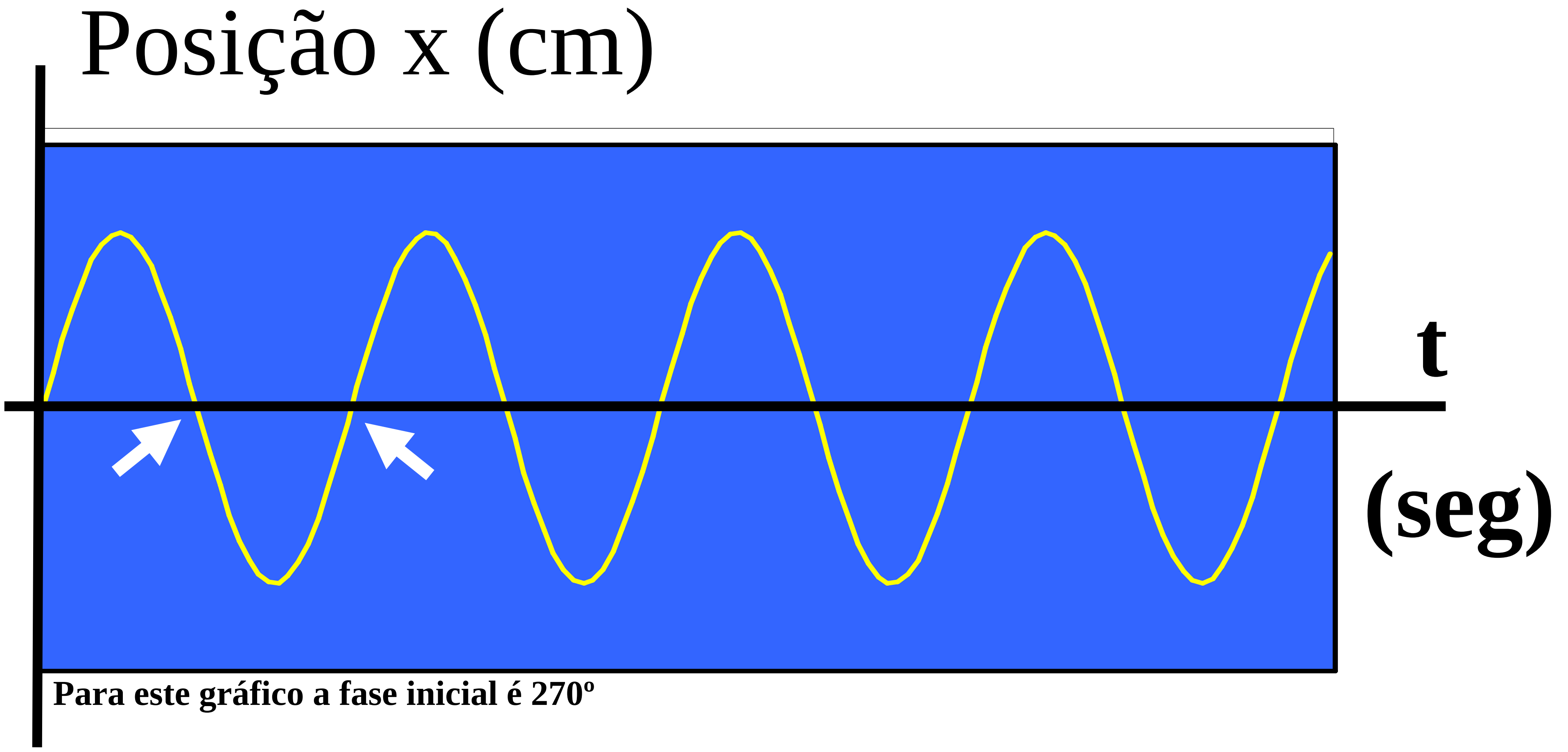


(a)



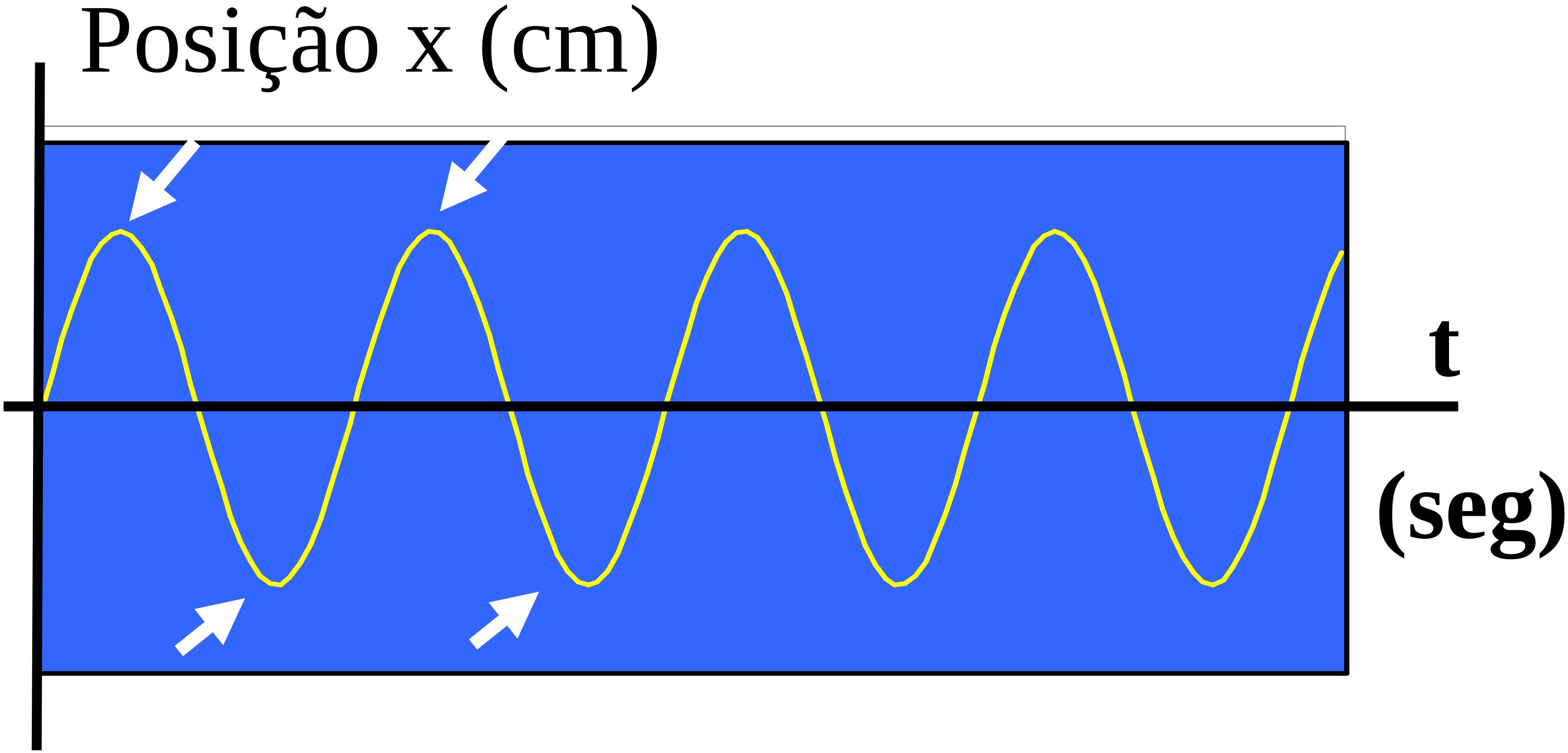
(b)





Nas pos. centrais a decl. é máxima

Nas pos. centrais a vel. é máxima



Nas posições extremas a decl.é **nula**

Nas posições extremas a velc.é **nula**

Movimento Harmônico Simples

- A aceleração de uma partícula a oscilar será dada por:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

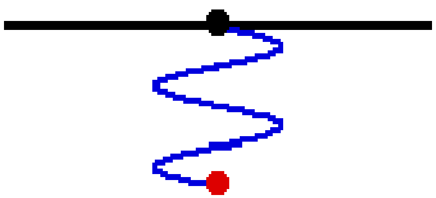
Sempre que a aceleração de um objeto é proporcional ao seu deslocamento e é oposta à sua direção, o objecto move-se com um MHS.

Movimento Harmônico Simples

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \Phi_0),$$

$$v(t) = dx(t)/dt = -x_m \omega \,\mathrm{sen}(\omega t + \Phi_0)$$

$$a(t) = d^2x(t)/dt^2 = -x_m \omega^2 \cos(\omega t + \Phi_0)$$



Valores Máximos e Mínimos

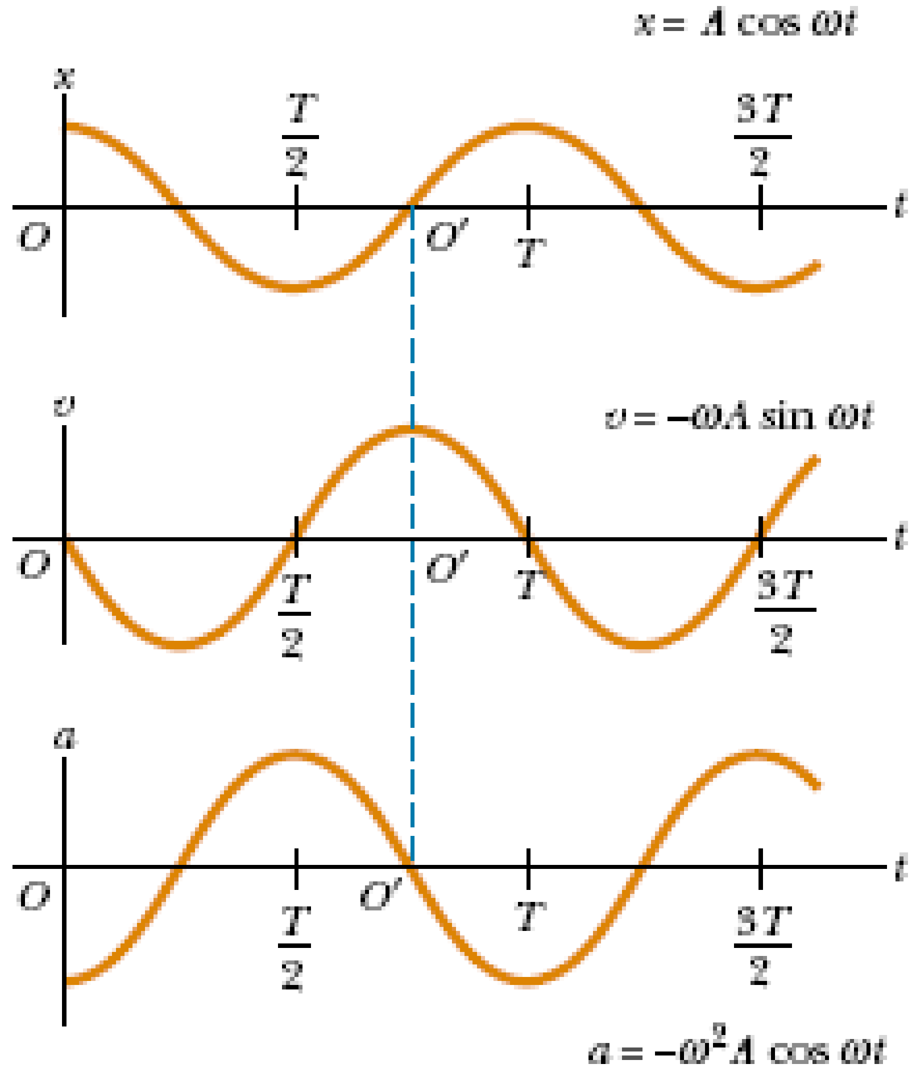
$$v_{máx} = \pm x_m \omega \qquad a_{máx} = \pm x_m \omega^2$$

Gráficos do MHS

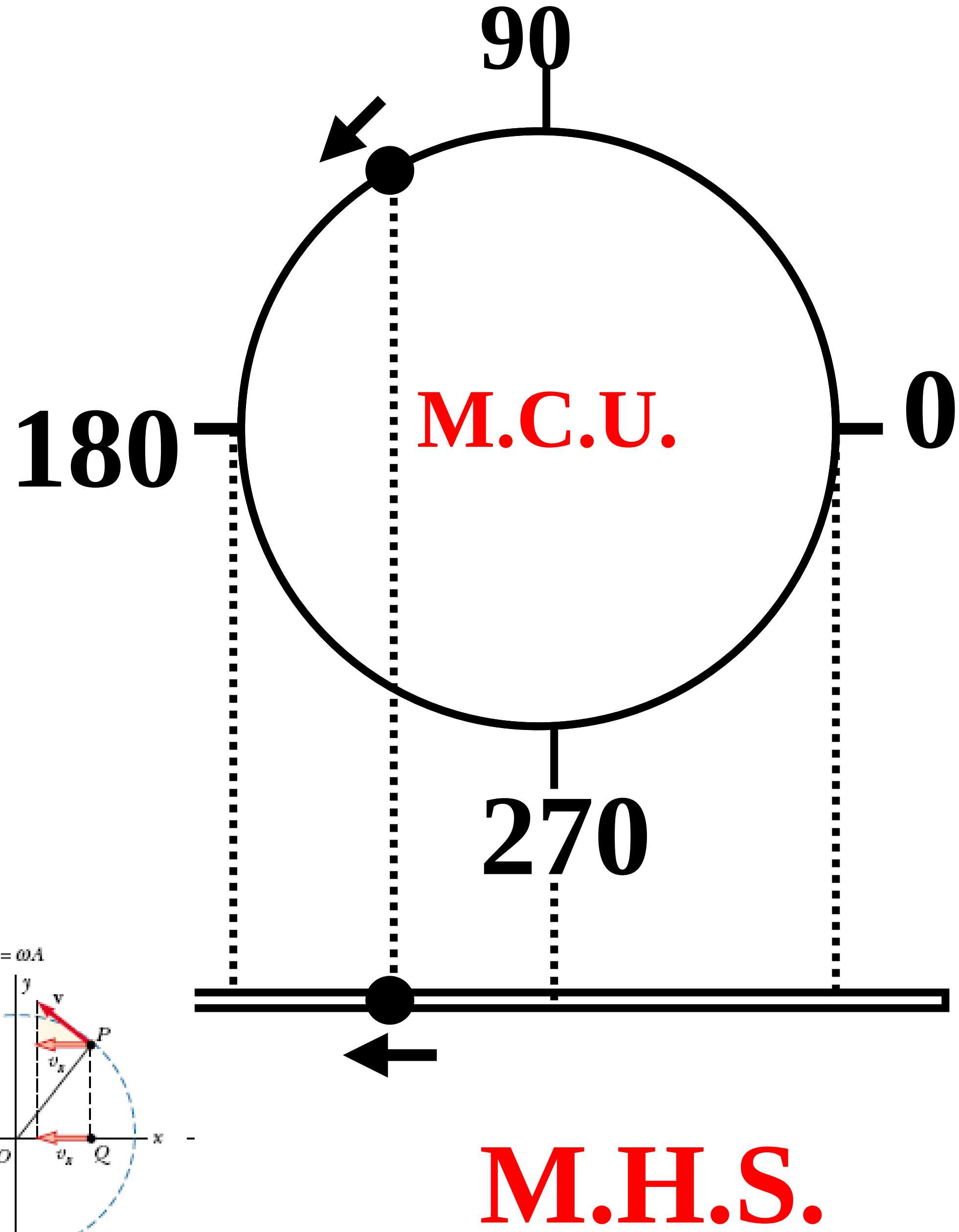
$x\ (t) = \ x_m \cos\ (\omega\ t + \Phi_0$

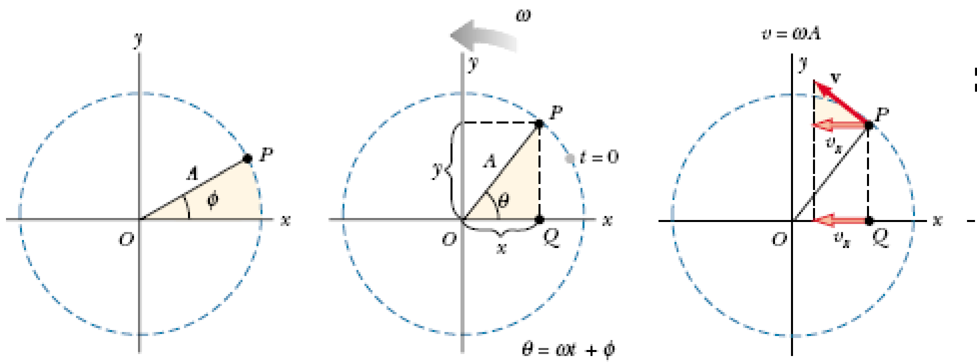
$v\ (t) = \ dx\ (t)/dt\ = -\ x_m\ \omega$ sen
$\Phi_0\ )$

$a\ (t) = d^2x\ (t)/dt^2\ =$
$a = \ -\ x_m\ \omega^2 \cos\ (\omega\ t + \Phi_0$

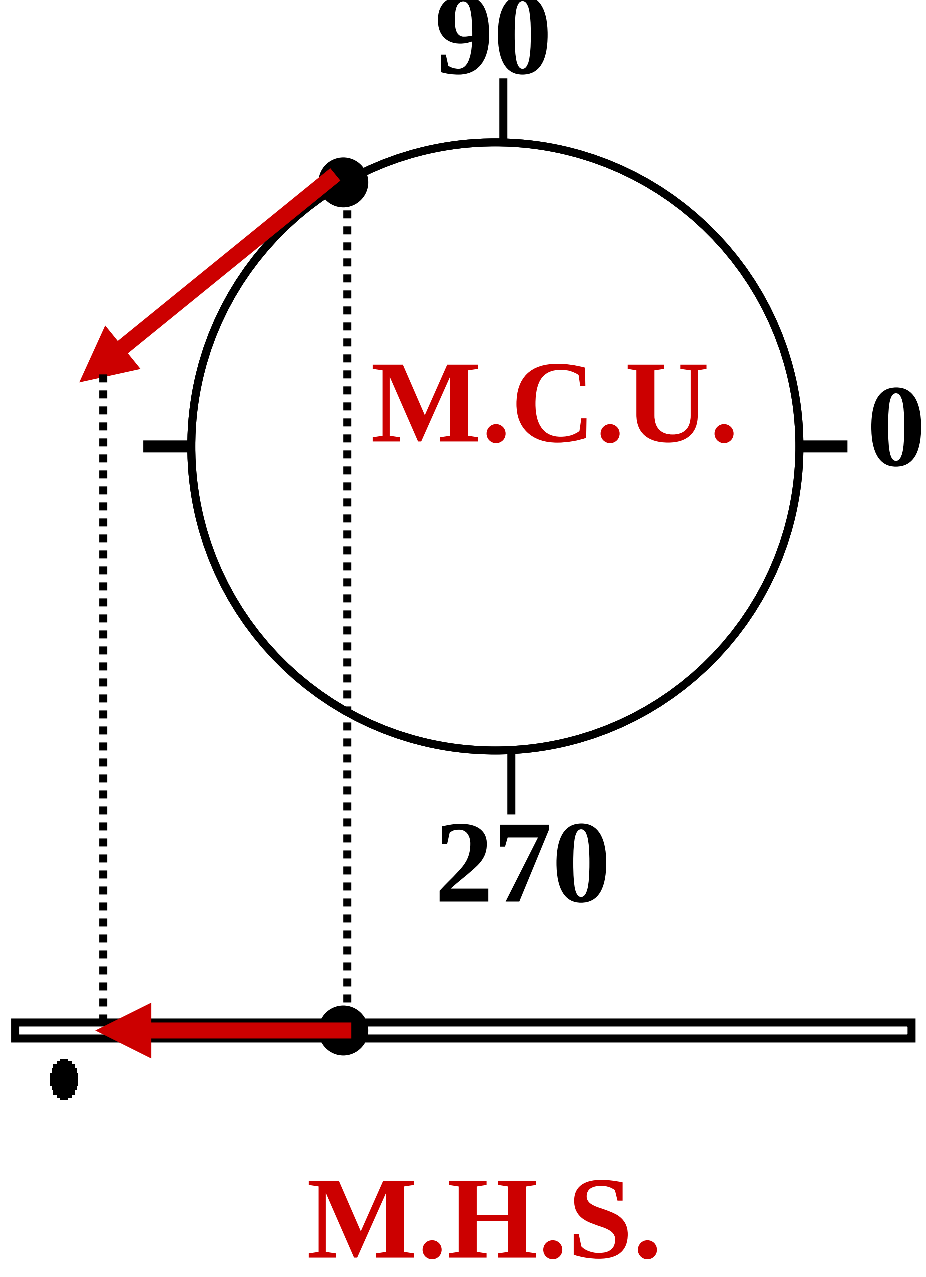


o movimento da <u>projeção</u> ou sombra de um ponto em movimento circular uniforme é um MHS.

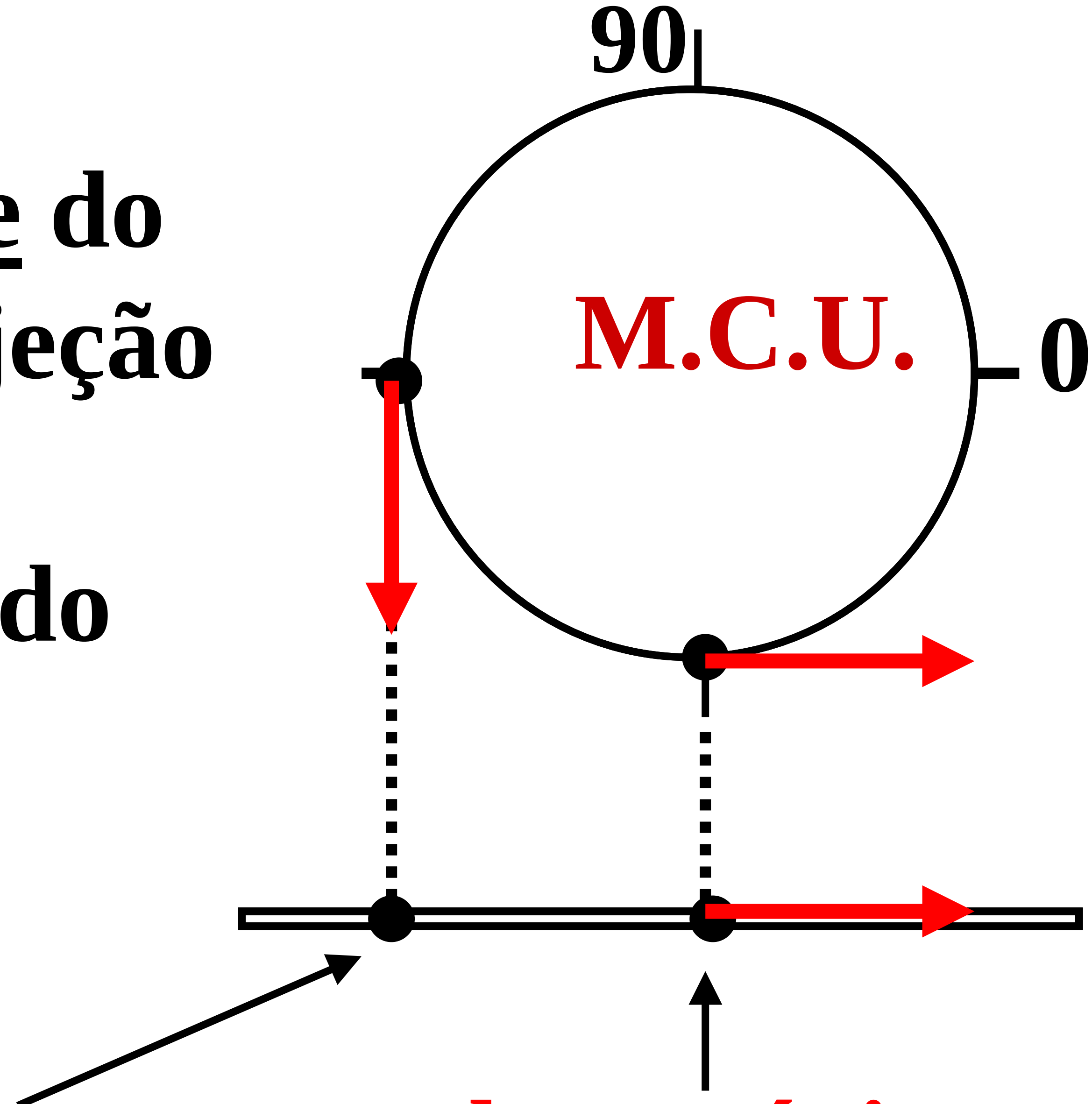




A <u>velocidade</u> do MHS é a projeção do vetor velocidade do MCU.



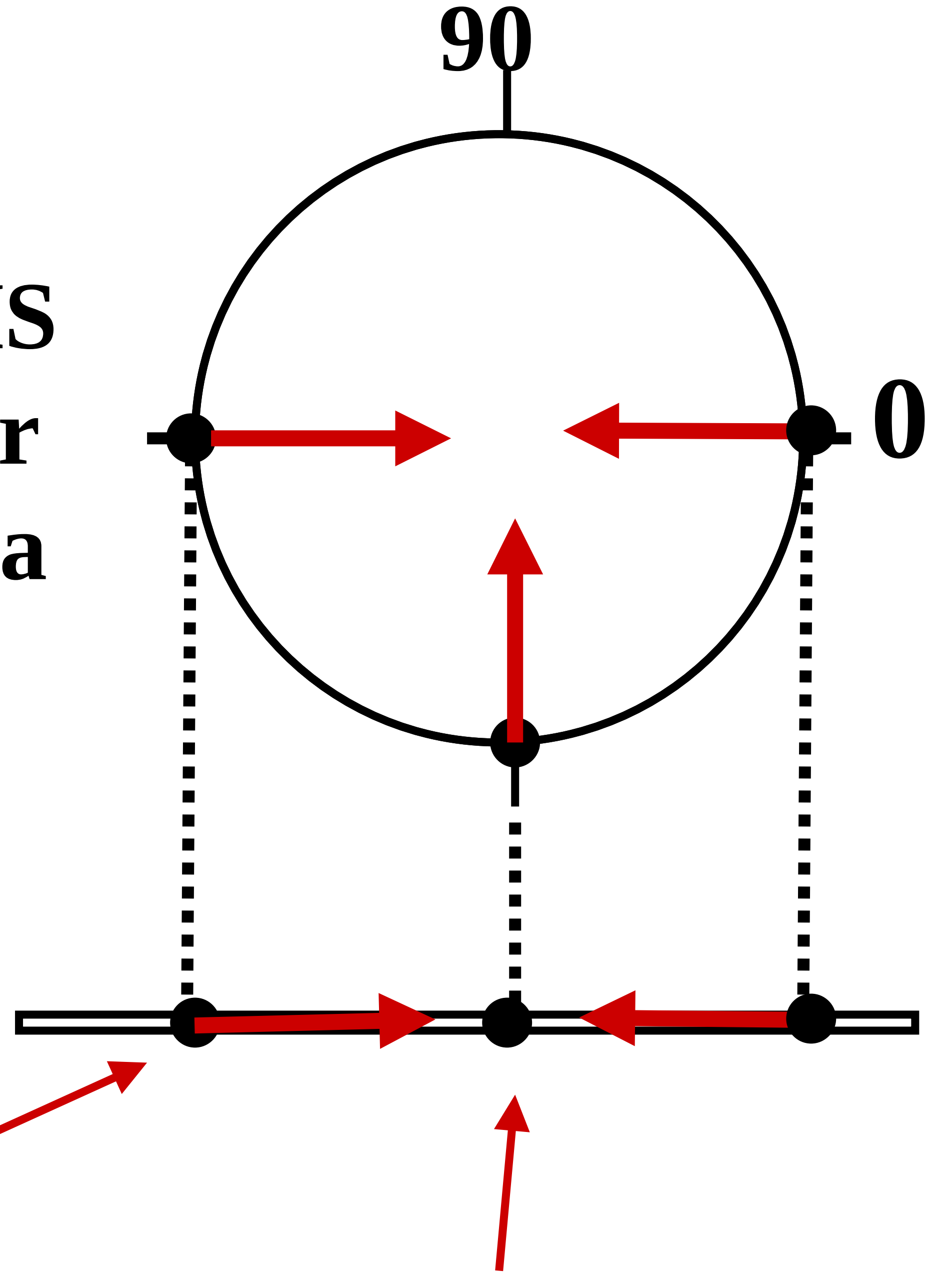
A <u>velocidade</u> do MHS é a projeção do vetor velocidade do MCU.



veloc. nula

veloc. máxima

A <u>aceleração</u> do MHS é a projeção do vetor aceleração centrípeta do MCU.



Acel. máxima

acel. nula

Exemplo

Uma partícula está em movimento harmônico simples em uma dimensão e move-se de acordo com a equação:

$$\mathbf{x(t) = (6{,}0\,m)\cos[(3\pi\ rad/s)t + \frac{\pi}{3}rad]}$$

a) Em t = 2 s, quais são: o deslocamento (elongação) ; b) a velocidade ; e c) a aceleração ? d) Qual a fase do movimento em t = 2,0 s ? Também, quais são e) a freqüência e f) o período do movimento ?

Movimento Harmônico Simples

Energia

- Energia cinética

$$\mathbf{E_C = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m\left(-\omega X_m \sin(\omega t + \phi)\right)^2}$$

$$\mathbf{E_C = \tfrac{1}{2} k\ X_m{}^2\ \sin^2(\omega t + \phi)}$$

- Energia Potencial

$$\mathbf{E_P = \tfrac{1}{2} k x^2 = \tfrac{1}{2} k\left(X_m \cos(\omega t + \phi)\right)^2}$$

$$\mathbf{E_P = \tfrac{1}{2} k X_m{}^2 \cos^2(\omega t + \phi)}$$

- Energia Mecânica

$$\boxed{\mathbf{E_M = E_C + E_P = \tfrac{1}{2} k X_m{}^2}}$$

Se x = x , v = 0

Movimento Oscilatório Amortecido

MHS amortecido

Em diversas situações do nosso cotidiano, os movimentos oscilatórios têm uma duração finita, eles têm um começo e um fim. Não ficam se movendo indefinidamente. Isso acontece, basicamente, devido a atuação de forças dissipativas tais como as forças de atrito.

Em uma situação simples as forças dissipativas podem ser representadas por uma função que depende linearmente da velocidade.

Movimento Oscilatório Amortecido

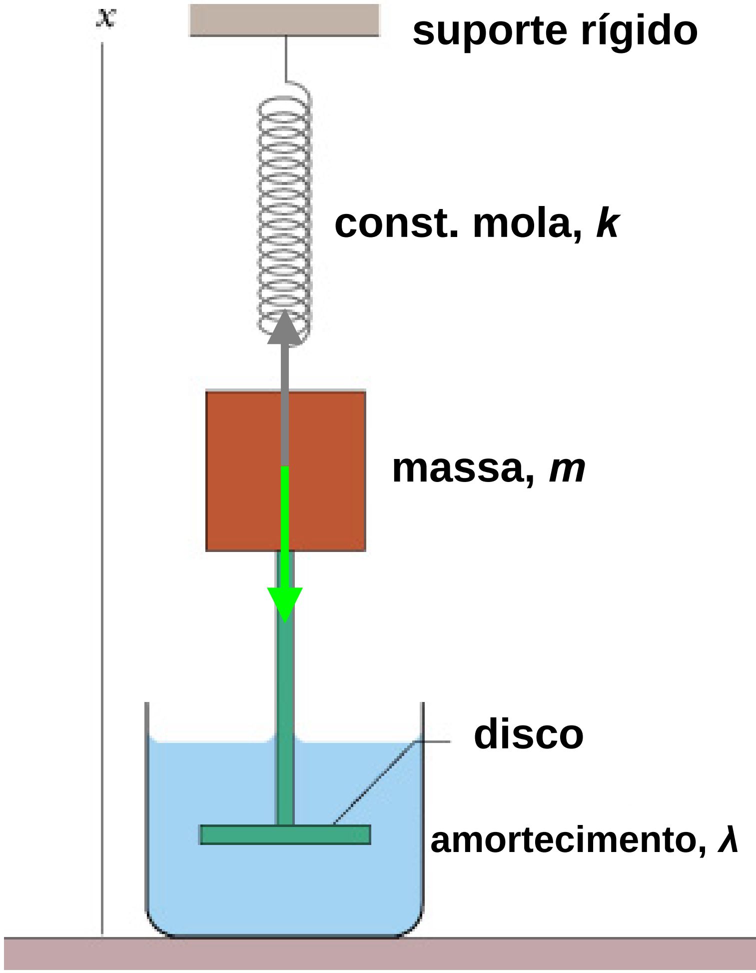
Vamos considerar um sistema composto de uma mola de constante elástica k com uma das extremidades presa ao teto e a outra suspendendo um corpo de massa m .

Nesse corpo está presa uma haste vertical que tem a sua outra extremidade presa a um anteparo que está mergulhado em um líquido. Quando o anteparo se move no líquido esse movimento é amortecido por uma força que surge devido à viscosidade do líquido.

Movimento Oscilatório Amortecido

$$\sum F = ma = -kx - bv$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$



Movimento Oscilatório Amortecido

Essa força dissipativa pode ser descrita por uma equação do tipo:

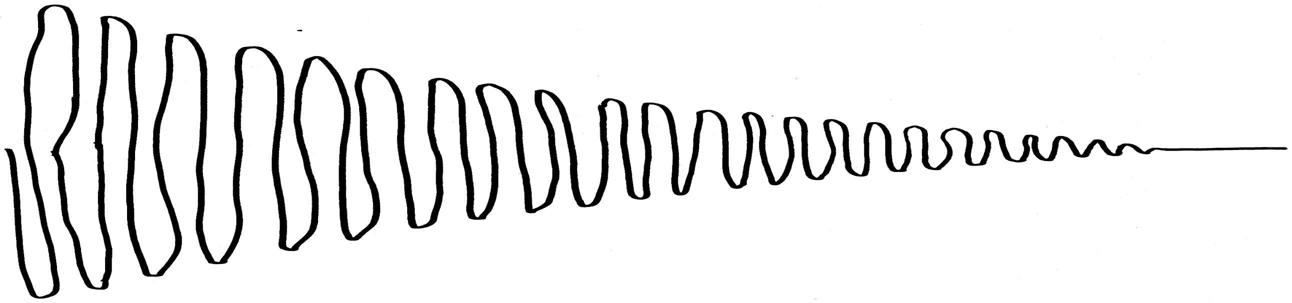
$$F_A = -\,b\,v$$

onde *b* é **chamado de constante de amortecimento**.

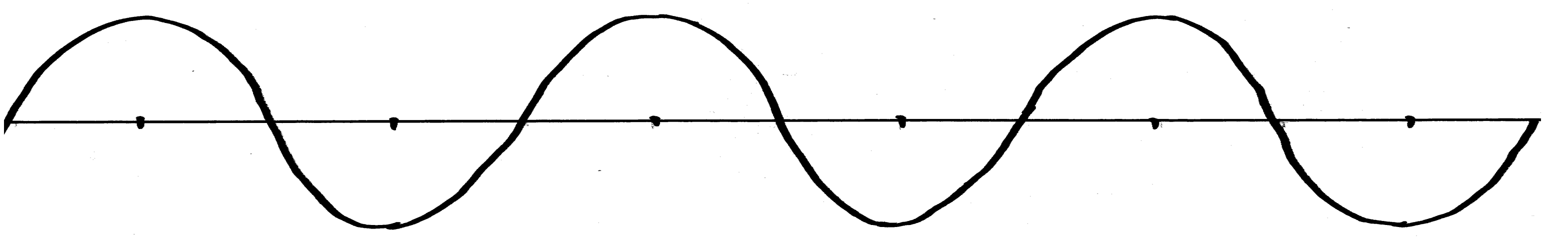
A equação da posição em função do tempo tem a forma:

$$\mathbf{x\,(t) = x_m\, e^{-bt/2m} \cos\,(w\,t + \theta_0)}$$

Oscilação amortecida: a amplitude diminui até zero: pêndulo



Oscilação permanente: a amplitude permanece constante: pêndulo de relógio mecânico



Movimento Oscilatório Forçado

Força dissipativa descrita por uma equação do tipo:

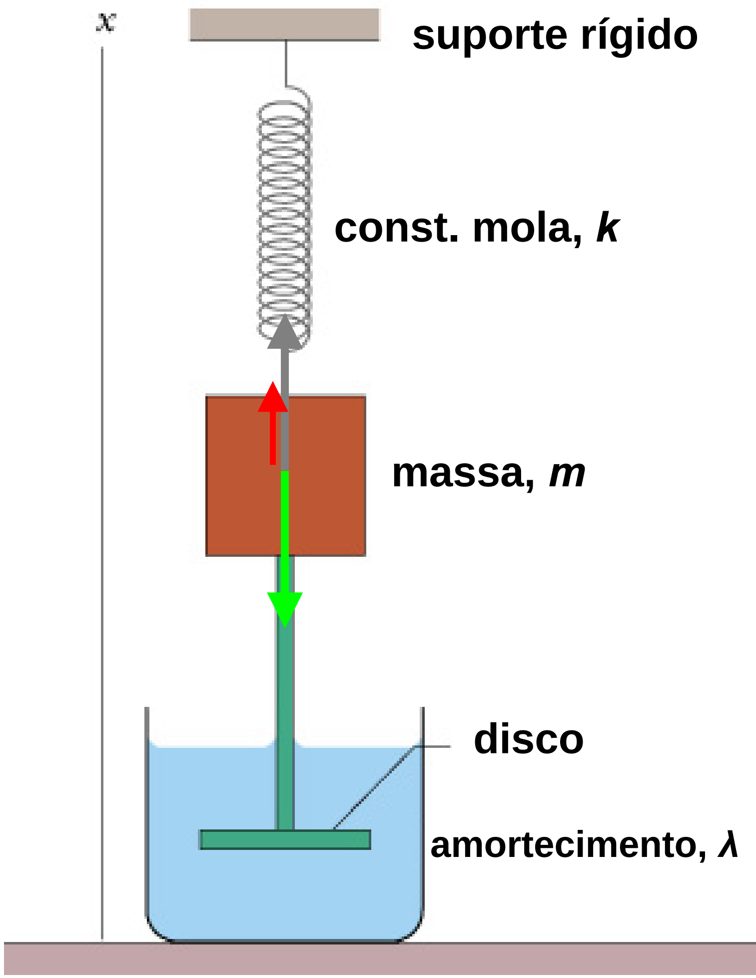
$$F_A = -\lambda v$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos\omega_f t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t$$

$$x = A\cos(\omega_f - \alpha)$$



$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_f}$$

Movimento Oscilatório Forçado

RESSONÂNCIA $\Leftarrow$ $A_{máximo}$ $\Leftarrow$ quando $\omega_f = \omega_0$

$$x = A\cos(\omega_f - \alpha)$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_f}$$