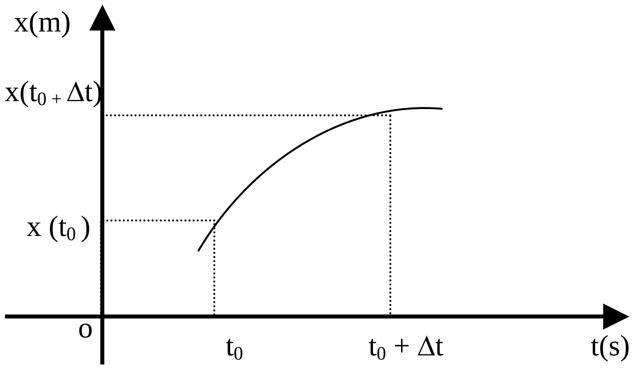
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Disciplina de Física I Prof. *Nelson Elias*

Aluno(a):____ Data:____/____/_____

Cap. 02 - Notas de Aula 01 : A derivada da posição em relação ao tempo: velocidade Instantânea.

Seja x(t) a função da posição em relação ao tempo está representada no gráfico, e sejam x_0 e $x_0 + \Delta x$ dois valores de seu domínio.



A razão incremental é dada por : $\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

Denomina-se função derivada o **limite** de $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ quando Δt **tende a zero** (assume valores muito pequenos).
E indica-se por :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

NOTA:
A função derivada também pode ser indicada por :

- x' (lê-se, derivada de x)
- $\dfrac{dx}{dt}$ (lê- se, derivada de x em relação a t)

Exemplo :

Dada a função $x(t) = 3t^2$, definida com x em metros e t em segundos , calcular a velocidade instantânea.

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3(t+\Delta t)^2 - 3t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3\left[t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2\right] - 3x^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 3t^2}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(6t - 3\Delta t)}{\Delta t} = 6t \quad \Rightarrow x'(t) = v(t) = 6t$$

Regras Fundamentais de Derivação:

- Derivada da função constante : $\mathbf{x(t) = k}$; k∈R é nula, isto é : $\mathbf{x(t) = k \Rightarrow x'(t) = 0}$
- Derivada da função identidade : $\mathbf{x(t) = t}$ é 1, ou seja : $\mathbf{x(t) = t \Rightarrow v(t) = 1}$
- Derivada da função potência : $\mathbf{x(t) = t^n\ (n) \Rightarrow x'(t) = nt^{n-1}}$

Exemplos:

1. $\mathbf{x(t) = x^3 \Rightarrow x'(t) = 3t^{3-1} \Rightarrow v'(t) = 3t^2}$

2. $\mathbf{x(t) = 4t^2 \Rightarrow x'(t) = 2 \cdot 4t^{2-1} \Rightarrow x'(t) = 8t}$

Velocidade e Velocidade Média:

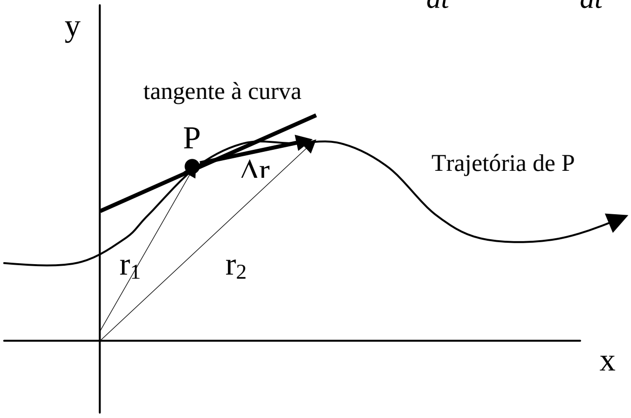
- Uma partícula que sofre um deslocamento **Δr**, durante um intervalo de tempo Δt , tem **velocidade média:**

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

A **velocidade instantânea** v é o limite de $\vec{v}$, quando Δt tende para zero. Lembramos que esse limite é a derivada de **r** em relação á t ou seja, $v = \frac{d\vec{r}}{dt}$; Substituindo **r** pela expressão **r** = x**i** + y**j** + z**k** , temos :

$$v = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad \Rightarrow \quad v = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \quad ;$$

os coeficientes são as componentes escalares de v: $v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$; $v_z = \frac{dz}{dt}$



A posição da partícula **P**, na sua trajetória, é mostrada no instante $\mathbf{t_1}$ e no instante $\mathbf{t_1 + \Delta t}$ seguinte. O vetor **Δr** é o deslocamento da partícula, no intervalo **Δt**. Também é mostrada a tangente à trajetória no instante $\mathbf{t_1}$.

Obs: No limite, quando Δt tende a zero, a velocidade média tende para v (velocidade instantânea), e também, a velocidade média tem a direção da tangente. Logo, v também tem a mesma direção, isto é, sempre tangente à trajetória da partícula.

Aceleração e Aceleração Média:

- Quando a velocidade de uma partícula varia de v_1 para v_2, no intervalo de tempo Δt, sua aceleração média $\bar{a}$, durante este intervalo de tempo é :

$$\bar{a} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

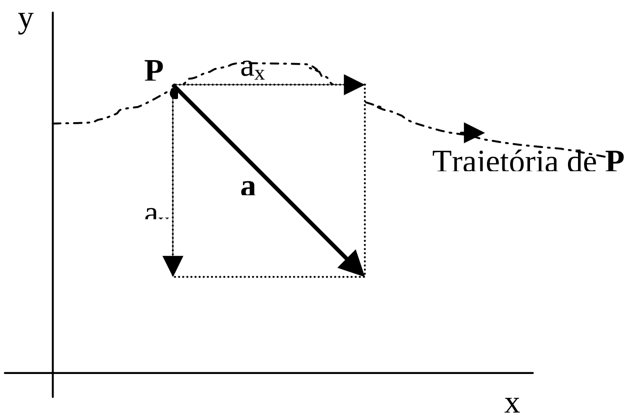
Aceleração instantânea **a** é o limite de **a** quando Δt tende a zero, ou seja, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Quando a velocidade varia em módulo e/ou direção, significa que existe uma aceleração:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x \hat{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \qquad \Rightarrow \quad \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

onde as três componentes escalares do vetor aceleração são:

$$\overrightarrow{a_x} = \frac{dv_x}{dt} \quad ; \quad \vec{a}_y = \frac{dv_y}{dt} \quad e \quad \vec{a}_z = \frac{dv_z}{dt}$$



Exemplo 1: Uma lebre atravessa correndo um estacionamento de veículos. A trajetória percorrida pela lebre é dada pelas componentes do seu vetor posição com relação à origem das coordenadas, que são função do tempo:

x = $-0{,}31t^{2\,+}$ 7,2t + 28 e y = $0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30$

As unidades dos coeficientes numéricos nessas equações são tais que, se substituirmos t em segundos, obteremos x e y em metros.

- a) Calcule o vetor posição **r** da lebre (módulo e direção) em t=15 s :

x = (- 31) $(15)^2$ + (7,2)(15) + 28 = 66 m ; y = (0,22)$(15)^2$ – (9,1)(15) + 30 = -57 m

Módulo do vetor **r :** $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66m)^2 + (-57m)} = 87m$

Direção do vetor **r :** o ãngulo θ que **r** faz com o semi-eixo positivo x é :

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{-57m}{66m}\right) = -41^o$$

Obs: Embora a tangente de θ = 139º seja igual à de θ = -41º, não consideraremos o ângulo de 139º, por ser incompatível com os sinais das componentes de **r.**

- b) Calcule o módulo e a direção do vetor velocidade da lebre em t = 15s.

Componente da velocidade na direção x : $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28\right) = -0{,}62t + 7{,}2$

Em t = 15s, obtemos : $v_x = (-0{,}62)(15) + 7{,}2 = -2{,}1m/s$

Componente da velocidade na direção y : $v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30\right) = 0{,}44t - 9{,}1$

Em t = 15s, obtemos ; $v_y = (0{,}44)(15) - 9{,}1 = -2{,}5m/s$

Módulo do vetor **v :** $v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = \sqrt{(-2{,}1m/s)^2 + (-2{,}5m/s)^2} = 3{,}3m/s$

Direção do vetor **v :** $\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}5m/s}{-2{,}1m/s}\right) = \tan^{-1}1{,}19 = -130^o$

Nota : Embora o ângulo de 50º tenha a mesma tangente, os sinais das componentes indicam que o ângulo desejado está no terceiro quadrante, ou seja, 50º – 180º = -130º, O vetor velocidade é tangente à trajetória da lebre e aponta na direção em que ela está correndo, em t = 15s.

- c) Calcule também o módulo e a direção do vetor aceleração em t = 15s .

Componente da aceleração na direção x : $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}62t + 7{,}2) = -0{,}62m/s^2$

Componente da aceleração na direção y : $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}44t - 9{,}1) = 0{,}44m/s^2$

Observamos que a aceleração é invariável com o tempo, Podemos verificar que o vetor a tem módulo e direção constantes em toda trajetória.

http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/cinematica/rectilineo/rectilineo.htm#Interpretação%20geométrica%20da%20derivada