

**TEXTO DE REVISÃO 02 - VETORES**

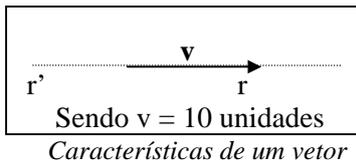
Caro Aluno(a): Este texto de revisão deve ser estudado antes de passar para o cap. 03 do do Halliday.

**1- Vetores:**

As grandezas vetoriais são aquelas que envolvem os conceitos de direção e sentido para uma completa caracterização. Um vetor é a imagem de uma grandeza vetorial, simbolizado por uma seta ( $\vec{\phantom{v}}$ ). Assim o vetor velocidade é  $\vec{v}$ , o vetor aceleração é  $\vec{a}$  e o vetor força é  $\vec{F}$ .

Uma outra maneira de representarmos um vetor é escrevermos em negrito, ou seja, o vetor velocidade é  $\mathbf{v}$ , o vetor aceleração é  $\mathbf{a}$  e o vetor força é  $\mathbf{F}$ . Usarei esta maneira de representar por ser menos trabalhoso para a impressão dessa apostila.

Um vetor tem as seguintes características : valor (módulo do intensidade) , direção e sentido.



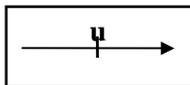
O vetor  $\mathbf{v}$  ao lado apresenta as seguintes características:

Valor: 10 m/s (módulo ou magnitude)

Direção: horizontal

Sentido: para a direita (ou LESTE)

A reta  $r' r$  é chamada de suporte do vetor e indica a sua direção.

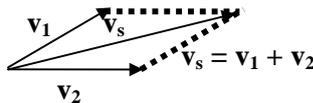


O valor de um vetor também pode ser indicado na própria direção do vetor.

O vetor  $\mathbf{u}$  tem o valor de duas unidades vetoriais (2uv).

**- Operações com vetores:**

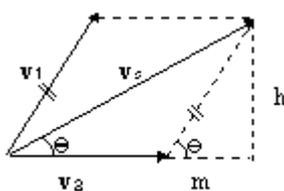
a) Soma de dois vetores:



1º) Dados dois vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ , o vetor soma  $\mathbf{v}_s$  (ou resultante) é obtido pela

**Regra do paralelogramo.**

Para o cálculo do valor do vetor soma  $\mathbf{v}_s$  aplicaremos conhecimentos de trigonometria.



$$v_s^2 = h^2 + (v_2 + m)^2 \quad \text{lembre que } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{e que } h = v_1 \sin \theta$$

$$v_s^2 = v_1^2 \sin^2 \theta + (v_2^2 + 2 v_2 m + m^2) \quad \text{lembrar que } m = v_1 \cos \theta$$

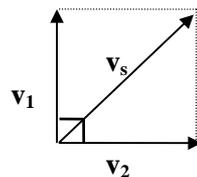
$$v_s^2 = v_1^2 \sin^2 \theta + v_2^2 + 2 v_2 v_1 \cos \theta + v_1^2 \cos^2 \theta$$

$$v_s^2 = v_1^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos \theta \quad \text{lembrar que } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$v_s^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos \theta$$

$$v_s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos \theta}$$

Caso particular:  $\theta = 90^\circ$

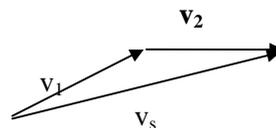
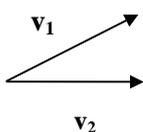


$$\cos 90^\circ = 0$$

$$v_s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

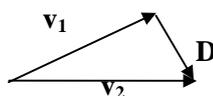
2º) Método do triângulo:

a) Vetor soma



$$\mathbf{R} = \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

b) Diferença de dois vetores:



$\mathbf{v}_1 + \mathbf{D} = \mathbf{v}_2$  A diferença de dois vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  é um terceiro vetor  $\mathbf{D}$  que  $\mathbf{D} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  somado ao segundo, dá como resultante o primeiro.

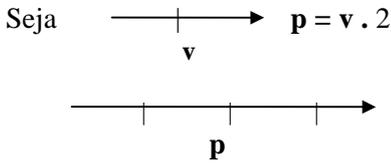
A subtração de vetores é um caso particular da ADIÇÃO.

Quando se desejar o valor do vetor diferença aplicaremos a Lei dos Co-senos:

$$D = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos \theta}$$

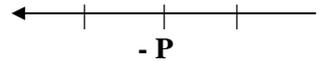
c) Multiplicação de um vetor por um número real:

$$\mathbf{p} = \mathbf{v} \cdot n ; \text{ se } n > 0 \text{ então } \mathbf{p} = n\mathbf{v}$$

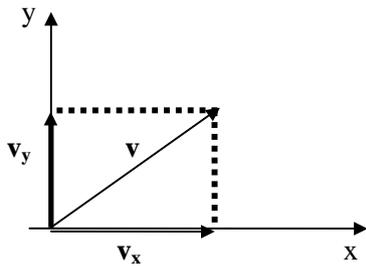


Um vetor multiplicado por um número real positivo dará um vetor de mesmo sentido. **O vetor v multiplicado por 2 dará o vetor p.** Sendo  $p = 2v$

Um vetor multiplicado por um número real negativo dará um vetor de sentido oposto. No ex. anterior se o vetor v for multiplicado por (-2) teremos:



- Componentes de um vetor:

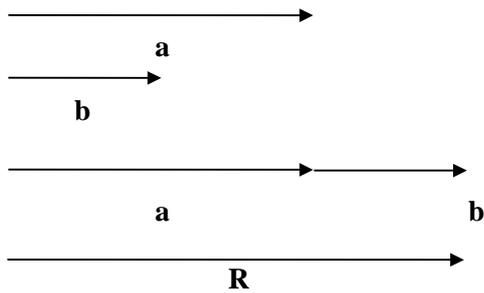


Projetando o vetor v sobre os eixos x e y, obtemos os vetores componentes  $v_x$  e  $v_y$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y$$

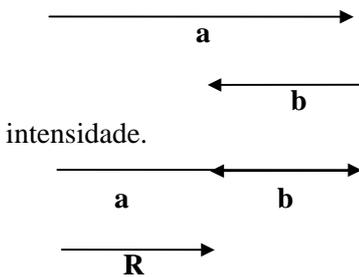
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Obs: a) Quando dois vetores tiverem a mesma direção e o mesmo sentido ( $\theta = 0^\circ$ ), o vetor resultante será:



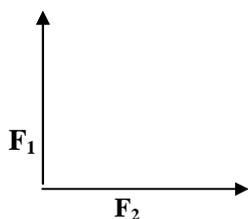
Intensidade:  $R = a + b$   
 Direção: mesma de a e b  
 Sentido: mesmo de a e b

c) Quando dois vetores tiverem a mesma direção e os sentidos opostos ( $\theta = 180^\circ$ ), o vetor resultante será:

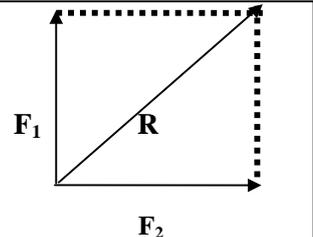


Intensidade:  $R = a - b$   
 Direção: mesma de a e b  
 Sentido: mesmo sentido do vetor de maior intensidade.

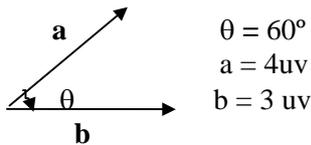
**EXEMPLO 1:** Sejam os vetores  $F_1$  e  $F_2$  de valores iguais a 10 uv e 5 uv, respectivamente, cuja representação vetorial se encontra abaixo. Trace a resultante  $R$  e dê o seu valor.



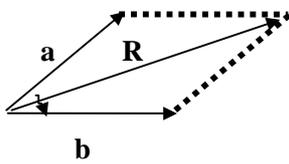
*Solução:*  $R^2 = F_1^2 + F_2^2$   
 $R^2 = 100 + 25$   
 $R^2 = 125$   
 $R = 5\sqrt{5} \text{ uv}$



**EXEMPLO 2:** Dado o diagrama vetorial, trace o vetor resultante e dê o seu valor:



Solução:



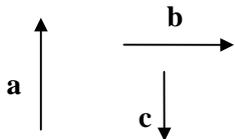
$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

$$R = \sqrt{16 + 9 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ}$$

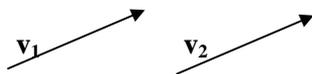
$$R = \sqrt{25 + 24 \cdot 1/2}$$

$$R = \sqrt{37} \text{ uv}$$

**EXEMPLO 3:** Trace a resultante **R** do sistema de vetores abaixo:

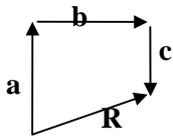


Solução: Um vetor equipolente é um outro vetor de mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido.



Os vetores  $v_1$  e  $v_2$  são equipolentes ( $v_1 = v_2$ )

De um ponto qualquer, traçam-se vetores equipolentes aos vetores **a**, **b** e **c**, construindo-se um polígono. A resultante **R** é um vetor que liga a origem do primeiro vetor traçado ao final do último vetor:  $R = a + b + c$

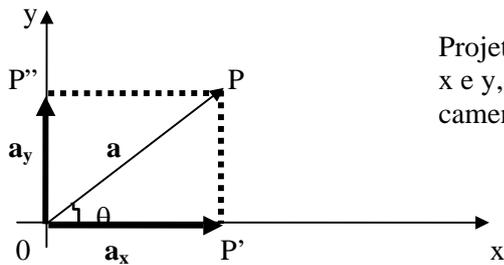


**EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM:**

- Mariana anda 40 metros para o leste e certa distância para o norte, de tal forma que fica afastada 50 metros do ponto de partida. Determine a distância percorrida para o norte. Resp.: 1) 30m
- Os deslocamentos sucessivos efetuados por um veículo, quando se movimenta de um Ponto A para outro B, foram: 40 Km para o norte, 40 Km para o leste e 10 Km para o sul. Para retornar de B para A, qual a menor distância a ser percorrida? Resp.: 2) 50 Km
- Considere dois vetores : um cujo módulo seja 30 e outro cujo módulo seja 40. Determine como os vetores podem ser combinados para que a soma tenha módulo:  
a) 70                      b) 10                      c) 50 Resp.: 3) a)  $\theta = 0^\circ$    b)  $\theta = 180^\circ$    c)  $\theta = 90^\circ$
- Um barco desenvolve, em relação à água de um rio, velocidade de 3 m/s. A velocidade da correnteza é de 6 m/s, em relação às margens. Determine a velocidade resultante do barco em relação às margens quando:  
a) ele desce o rio;  
b) ele sobe o rio. Resp.: 4) a) 9 m/s   b) 3 m/s

## - Decomposição de um vetor sobre dois eixos ortogonais:

Dado um vetor  $\mathbf{a}$  e um sistema de dois eixos ortogonais  $x$  e  $y$  :

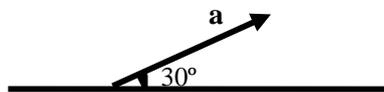


Projetando ortogonalmente as extremidades do vetor  $\mathbf{a}$  nos eixos  $x$  e  $y$ , obtemos suas componentes retangulares  $\mathbf{a}_x$  e  $\mathbf{a}_y$ . Analiticamente temos: o triângulo  $OP'P$  é retângulo, portanto:

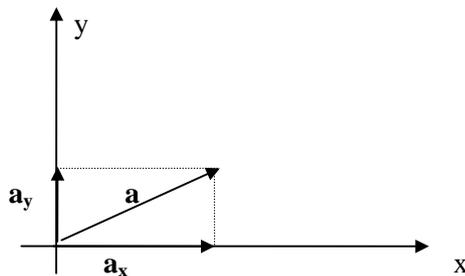
$$\cos \theta = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{a_x}{a} \Rightarrow \boxed{a_x = a \cdot \cos \theta}$$

$$\sin \theta = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} = \frac{a_y}{a} \Rightarrow \boxed{a_y = a \cdot \sin \theta}$$

**EXEMPLO 4:** Determine o módulo das componentes retangulares do vetor  $\mathbf{a}$  de módulo 10 metros, conforme a figura:



*Solução:* Pelo ponto de origem do vetor  $\mathbf{a}$ , consideremos um sistema de eixos coordenados  $x$  e  $y$ , como mostra a figura:



Projetando o vetor  $\mathbf{a}$ , nos eixos  $x$  e  $y$ , temos:

Componente segundo  $x$

Componente segundo  $y$

$$a_x = a \cdot \cos 30^\circ$$

$$a_y = a \cdot \sin 30^\circ$$

$$a_x = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_y = 10 \cdot 1/2$$

$$\boxed{a_x = 5 \cdot \sqrt{3} \text{ m}}$$

$$\boxed{a_y = 5 \text{ m}}$$

### EXERCÍCIO DE APRENDIZAGEM:

6) Um corpo é lançado com velocidade de 500 m/s, fazendo um ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal. Determine as componentes vertical e horizontal da velocidade do corpo. Resp.: 6) 433 m/s e 250 m/s

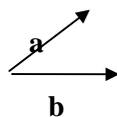
### Exercícios de Fixação:

7) Os vetores ao lado têm:

- mesmo módulo.
- mesmo sentido
- mesma direção.
- direções diferentes e paralelas.
- simetria.



8) São dados os vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Assinale o vetor que melhor representa a diferença  $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$



- 
- 
- 
-

9) Dois vetores têm módulos 4 m/s e 5 m/s e formam entre si um ângulo de  $60^\circ$ . A razão entre o módulo do vetor soma e o módulo do vetor diferença é aproximadamente :

- a) 2,3      b) 1,7      c) 3      d) 4,2

10) Dois vetores têm módulos iguais a  $v$  e formam entre si um ângulo de  $120^\circ$ . A resultante entre eles tem módulo:

- a)  $v$       b)  $2v$       c)  $3v$       d)  $d/2$

11) Um barco alcança a velocidade de 18 Km/h, em relação às margens de um rio, quando se desloca no sentido da correnteza e de 12 Km/h quando se desloca em sentido contrário ao da correnteza. Determine o módulo da velocidade do barco em relação às margens e o módulo da velocidade das águas em relação às margens.

12) Um homem nadando em um rio paralelamente às suas margens, vai de um marco P a outro Q em 30 minutos e volta para P em 15 minutos. Se a velocidade da correnteza é de 1Km/h, qual a distância entre P e Q?

13) Um pescador rema perpendicularmente às margens de um rio, com uma velocidade de 3 m/s em relação às águas. As águas possuem velocidade de 4 m/s em relação às margens. Determine a velocidade do pescador em relação às margens.

**Gabarito exercícios de fixação:**

7) c

8) c

9) b

10) a

11)  $v_b = 15 \text{ Km/h}$      $v_c = 3 \text{ Km/h}$

12) 1 Km

13) 5 m/s

Referência:

Este texto utiliza como base a unidade 4,  
disponíveis na página do **Prof. Hélder M. Medeiros**  
<http://sites.uol.com.br/helderjf>