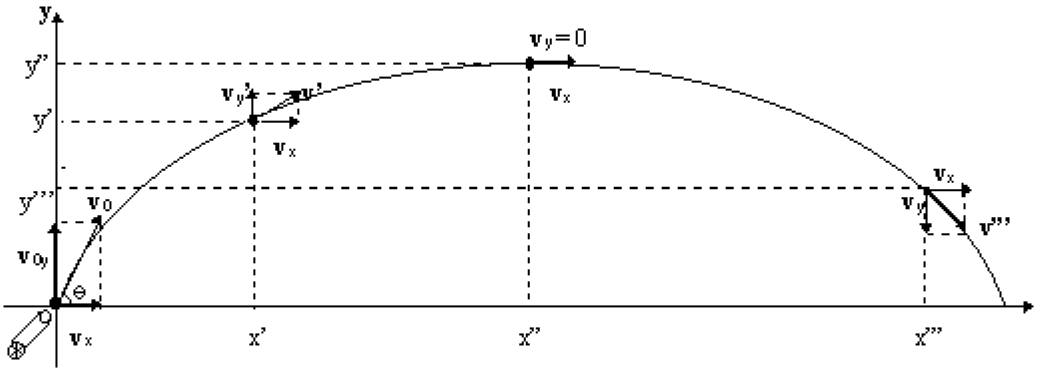
TEXTO DE REVISÃO 07 – Movimento de um projétil.   Movimento Em Duas Dimensões 2-D.

Caro aluno:

Este texto de revisão 07 tem por objetivo iniciar o estudo de movimento em duas dimensões sugiro o estudo deste texto antes de passar para o estudo do cap. 04 do livro de Halliday como forma lembrar do movimento de projéteis visto no ensino médio. A idéia é simples basta verificar que cada coordenada terá sua própria descrição para o movimento, assim o movimento resultante é uma composição dos dois movimentos independes das coordenadas x e y. No final do estudo deste texto procure fazer uma auto-avaliação através dos testes e exercícios propostos.

Movimento de um projétil:



Na figura acima, mostra um canhão lançando uma bala obliquamente, próximo à superfície da Terra, com uma velocidade inicial v_0 e um ângulo de lançamento com a horizontal igual a θ . Para facilitar o nosso estudo, desprezaremos a resistência do ar, pois este iria frear o projétil prejudicando seu movimento. Supondo então desprezível a resistência do ar, após o lançamento o projétil sofrerá apenas com a ação da gravidade, que o trará de volta ao solo. O projétil descreverá uma trajetória curva, semelhante àquela mostrada na figura. Mostraremos no Ex. abaixo que essa curva é uma parábola.

Como a única força que atua no projétil é o seu peso, concluímos que o movimento é acelerado e a sua aceleração será a aceleração da gravidade g.

Se fossemos estudar a trajetória do projétil sobre a parábola, tendo como dados iniciais apenas a velocidade inicial do projétil e o ângulo que este faz com a horizontal, nosso estudo ficaria muito complicado. Se você observar bem um movimento deste tipo, você notará que este movimento poderá ser decomposto em dois movimentos que nós já estudamos e que já estamos habituados com suas equações:

1º) Na vertical, teremos um lançamento vertical para cima, onde a velocidade inicial será v_{0y} , que é a velocidade de lançamento projetada no eixo-y como foi feito no exercício de aprendizagem número 6 e no exemplo 4 do tópico 4.1. Sendo assim, teremos no eixo-y um lançamento vertical para cima, com uma velocidade inicial $v_{0y} = v_0 \,.\, \text{sen}\, \theta$ e cuja equação horária das alturas ficará:

$$\mathbf{y = y_0 + v_{0y} \,.\, t - (g/2) \,.\, t^2} \qquad \text{onde } y_0 = \text{altura de lançamento}$$

Já a velocidade de subida do projétil segundo o eixo-y poderá ser dada por: $\mathbf{v_y = v_{0y} - g \,.\, t}$

Podemos lançar mão também da eq. de Torricelli: $\mathbf{v_y^2 = v_{0y}^2 - 2\, g\, \Delta y}$

2º) Na horizontal, teremos um movimento retilíneo e uniforme, pois a única força que atua no projétil é a gravitacional e esta força é vertical, não atrapalhando o movimento na horizontal. Sendo assim teremos no eixo-x um M.U. cuja velocidade será dada pela projeção da velocidade de lançamento sobre o eixo-x: $v_x = v_0 \,.\, \cos \theta$

A eq. horária da posição x será dada por:

$$\mathbf{x = x_0 + v_x \,.\, t} \qquad \text{Normalmente usa-se } x_0 = 0$$

Vamos fazer agora uma análise do movimento do projétil lançado pelo canhão da figura. O projétil é lançado com uma velocidade inicial v_0 que pode ser decomposta em duas velocidades v_{0y} e v_x . Quando ele estiver a uma altura y' , ele já terá deslocado na horizontal até x' e terá uma velocidade v' que poderá ser decomposta na vertical como v_y' e na horizontal como v_x . Só que normalmente no problema você não conhecerá v' que poderá ser calculada através da soma vetorial de v_x e v_y' , pois v_x e v_y' é fácil de achar através das equações já estudadas.   Logo $\mathbf{v' = v_x + v_y}$ ou seja $v' = \sqrt{v_x^2 + v_y'^2}$

Quando o projétil alcançar a altura y'' , ele está alcançando a altura máxima o que tornará $v_y = 0$ e neste ponto o projétil terá apenas uma velocidade horizontal igual a v_x .

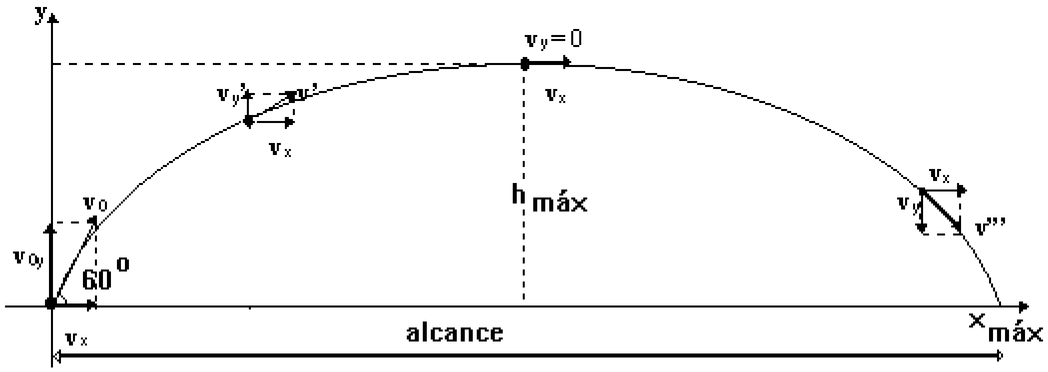
Note agora que quando o projétil estiver na posição x''' , ele já estará descendo com uma velocidade na vertical $v_y''' < 0$. Você poderá calcular a velocidade v"' da mesma forma que foi calculada na subida.

Vamos ver agora como funciona isso tudo!

<u>EXEMPLO 1</u>: Um corpo é lançado do solo verticalmente para cima, segundo um ângulo de 60º com a horizontal com velocidade de 400 m/s. Admitindo $g = 10\ m/s^2$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$; pede-se:

a) o tempo que o corpo leva para atingir a altura máxima em relação ao solo;
b) a altura máxima atingida;
c) o tempo gasto para atingir o solo; d) o alcance máximo do corpo;
e) a velocidade do corpo no instante 8 segundos;
f) a equação da trajetória do corpo.

Solução: O movimento do corpo pode ser decomposto em dois eixos, x e y , perpendiculares entre si. Segundo x, o movimento é uniforme e segundo y o movimento é uniformemente variado.



Inicialmente vamos determinar as componentes horizontal e vertical da velocidade inicial.

Componente segundo x :

$v_{0x} = v_0 \cdot \cos 60^o$

$v_{0x} = 400 \cdot ½ = 200\ m/s$ *(constante)*

Componente segundo y:

$v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\ 60^o$

$v_{0y} = 400 \cdot \sqrt{3/2} = 200 \cdot 1{,}7 = 340\ m/s$

As funções que regem os movimentos são:

segundo x

$x = x_0 + v_{0x}\, t$

$x = 200\, t$

segundo y

$y = y_0 + v_{0y}\, t + ½\, gt^2$ $\qquad v_y = v_{0y} + gt$

$y = 0 + 340\, t + ½\,(-10)\, t^2$ $\qquad v_y = 340 - 10.t$

$y = 340\, t - 5t^2$

a) Na altura máxima $v_y = 0$

$v_y = 340 - 10.t$

$0 = 340 - 10.t \Rightarrow \underline{t = 34\ s}$

b) Substituindo t = 34 s em: $y = 340\, t - 5t^2$

$y = 340 \cdot 34 - 5 \cdot 34^2$

$y = 11\,560 - 5\,780$

$\underline{y = 5780\ m}$

c) Quando o corpo toca o solo $y = 0$

$y = 340\, t - 5t^2$

$0 = 340\, t - 5t^2$

$0 = 5t\,(68 - t) \Rightarrow \cancel{t = 0}$ *instante de lançamento*

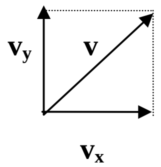
$\underline{t = 68\ s}$

d) Substituindo t = 68 s em:

$x = 200\, t$

$x = 200 \cdot 68 \qquad \Rightarrow \underline{x = 13\,600\ m}$

e) A velocidade **v** *é a resultante de duas velocidades* $\mathbf{v_{0x}}$ *e* $\mathbf{v_{0y}}$ *. No instante 8s o corpo está subindo, vide figura:*



Cálculo de v_y *no instante 8s.*

$v_y = 340 - 10\,t$

$v_y = 340 - 10 \cdot 8$

$v_y = 260$ m/s

Portanto: $v^2 = v_y^2 + v_x^2$

$v = \sqrt{260^2 + 200^2}$ assim $v \cong 328$ m/s

f) A equação da trajetória é a que relaciona x com y :

Temos $x = 200\,t$ (1)

$y = 340\,t - 5t^2$ (2) *De* (1) *teremos que* $t = x / 200$

Substituindo em (2)*, vem:*

$y = 340 \cdot (x / 200) - 5 \cdot (x / 200)^2 \Rightarrow y = (17/10)\,x - (5x^2 / 40\,000)$

$$y = \frac{17}{10}\,x - \frac{1}{8\,000}\,x^2$$ *o que mostra que a trajetória é uma parábola.*

<u>Observações</u>:

a) O módulo da velocidade vertical v_y diminui durante a subida e aumenta na descida.

b) No ponto de altura máxima ($h_{máx}$) o módulo da velocidade no movimento vertical é zero ($v_y = 0$) .

c) A distância horizontal entre o ponto de lançamento e o ponto de queda do corpo é denominada alcance ($x_{máx}$). Neste ponto $y = 0$.

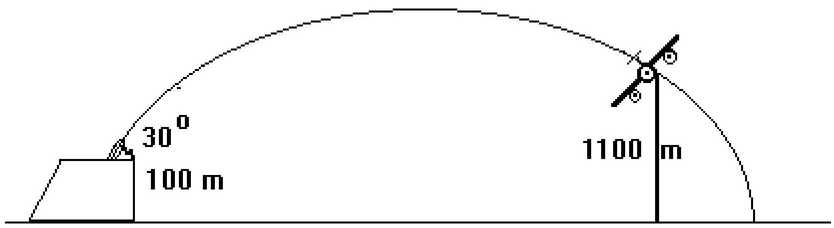
d) A posição do corpo em um dado instante é determinada pelas coordenadas x e y . Por exemplo, $P_1\,(x_1 , y_1)$

e) A velocidade num dado instante é obtida através da soma vetorial das velocidades vertical e horizontal, isto é, $\mathbf{v} = \mathbf{v_x} + \mathbf{v_y}$ **.** O vetor **v** é tangente à trajetória em cada instante.

f) Para um lançamento horizontal, teremos as mesmas equações, porém com $\theta = 0°$ e $v_{0y} = 0$ e a velocidade do projétil segundo o eixo-x será igual a velocidade de lançamento. Veja o exemplo 6 .

<u>EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM</u>:

1) Um canhão dispara um projétil do alto de uma elevação de 100 metros de altura, segundo um ângulo de 30º com a horizontal, com velocidade de 300 m/s, conforme a figura.
Admitindo $g = 10$ m/s^2 determine o tempo que o projétil leva para atingir um alvo localizado a 1 100 metros de altura, conforme indica a figura. Faça $\sqrt{3} = 1{,}7$



Resp.: 1) 20 s

2) Um canhão dispara um projétil que parte com velocidade de 50 m/s. Nesse local $g = 10$ m/s^2 e o canhão formam 45º com a horizαontal. Pergunta-se:

a) qual o módulo da componente horizontal da velocidade;

b) qual o módulo da componente vertical da velocidade parta t = 0 ;

c) em que instante $v_y = 0$;

d) qual o tempo que o projétil leva para retornar ao chão;

e) qual o módulo de sua velocidade nesse instante;

f) qual a altura máxima atingida pelo projétil;

g) a que distância o projétil cai do canhão?

Resp.: 2) a) $25\sqrt{2}$ m/s b) $25\sqrt{2}$ m/s c) $5\sqrt{2}\,/\,2$ s d) $5\sqrt{2}$ s e) 50 m/s f) 62,2 m g) 250 m

Alcance máximo de um projétil: Sabemos que $y = v_0 \operatorname{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$ e que $v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta - g.t$ e que para o eixo- x temos : $x = v_0 \cos\theta \cdot t$

Quando o projétil atinge a altura máxima, $v_y = 0$ logo $0 = v_0 \operatorname{sen}\theta - g \cdot t \Rightarrow t = \dfrac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$ Tempo de subida

logo o tempo total de percurso será: $t = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$

Substituindo o tempo total de percurso na eq. para o alcance teremos:

$$x = v_0 \cos\theta \cdot \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta}{g}$$

mas em trigonometria sabemos que $2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = \operatorname{sen} 2\theta$

então : $x_{máx} = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$ (alcance)

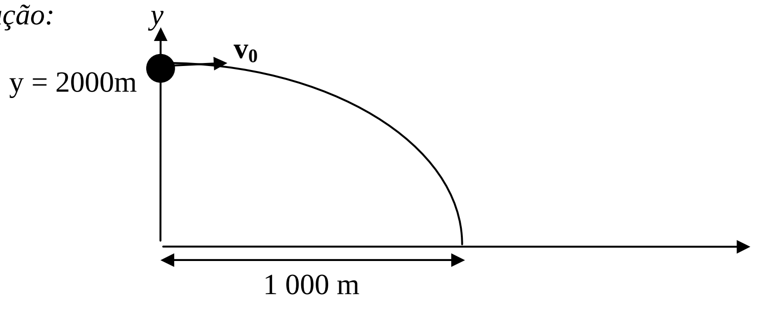
Repare que para termos alcance máximo é preciso que $\operatorname{sen} 2\theta = 1$ e para que isto ocorra $2\theta = 90º$.
Conclusão **$\theta = 45º$.** Portanto, se quisermos lançar um projétil o mais longe possível, devemos lançá-lo com velocidade formando 45º com a horizontal.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM:

3) Usando a fórmula para o alcance máximo, determine a letra g no problema 15.
Resp. : 3) 250 m

EXEMPLO 2: Um avião bombardeiro está voando a 2 000 m de altura quando solta uma bomba. Se a bomba cai a 1 000 m da vertical em que foi lançada, qual o módulo da velocidade do avião? Adote $g = 10$ m/s^2 .

Solução:



Como o avião está voando horizontalmente a velocidade da bomba é igual à do próprio avião. Chegaremos a esta velocidade pela eq: $x_{máx.} = v_0 \cdot t$, onde t será o tempo de queda da bomba que deveremos calcular agora.

$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - gt^2/2$ onde $y = 0$ (solo) $y_0 = 2000$ m (altura inicial) e $v_{0y} = 0$, pois o avião voa horizontalmente.

sendo assim - $0 = 2000 - 5t^2$

$5t^2 = 2000$ $\underline{t = 20\ s}$ (tempo de queda)

Substituindo o tempo de queda na eq. do alcance máximo teremos:

$x_{máx} = v_0 \cdot 20$ como $x_{máx} = 1000$ m $1000 = v_0 \cdot 20 \Rightarrow v_0 = 1000 / 20 \Rightarrow \underline{v_0 = 50\ m/s}$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM:
O enunciado abaixo refere-se às três próximas questões.
Um projétil é lançado horizontalmente com velocidade inicial de 5 m/s de uma altura h = 180 m. Considere a resistência do ar desprezível e adote $g = 10\ m/s^2$.

4) No instante t = 5s as coordenadas X e Y, que determinam as posições do projétil, valem, em unidades do S.I. respectivamente:
a) 10 e 45 b) 25 e 55 c) 10 e 125 d) 25 e 80 e) 50 e 180

5) No instante 5s, o projétil da questão anterior se encontra a uma distância do solo igual a:
a) 25 m b) 50 m c) 55 m d) 70 m e) 125 m

6) A velocidade do projétil, no instante 0,5 s, tem módulo e direção, respectivamente iguais a:
a) 7 m/s e 45º b) 7 m/s e 30º c) 7 m/s e 60º d) 5 m/s e 30º e) 5 m/s e 60º

Resp.: 4) b 5) c 6) a

Exercícios de Fixação:

7) Assinale com V de verdadeiro ou F de falso:
( ) 1. A trajetória descrita por um móvel lançado horizontalmente no vácuo é sempre parabólica, se considerarmos g constante.
( ) 2. O movimento realizado pelo projétil lançado horizontalmente no vácuo é uniformemente variado, se considerarmos g constante.
( ) 3. No lançamento horizontal realizado no vácuo, a velocidade do projétil é constante em módulo e direção.
( ) 4. Um avião que voa horizontalmente lança uma bomba contra um alvo. Despreze a resistência do ar. No instante em que a bomba explode no alvo, o avião estará exatamente sobre a vertical que passa pelo alvo.
( ) 5. No lançamento horizontal, o alcance jamais poderá ser igual a altura de lançamento.
( ) 6. A velocidade com que o projétil obliquamente chega ao plano de referência é igual à velocidade de lançamento.
( ) 7. O lançamento de um projétil lançado oblíqua ou horizontalmente é resultante de um movimento horizontal uniforme e outro vertical uniformemente variado.
( ) 8. O tempo que um corpo lançado horizontalmente leva para atingir o plano de referência é igual ao tempo que levaria para
chegar a esse plano se caísse em queda livre do ponto de lançamento.
( ) 9. Um projétil lançado obliquamente tem seu alcance horizontal máximo quando o ângulo de lançamento acima da horizontal for igual a 45º .
( ) 10. Lançamos obliquamente dois projéteis com velocidades de mesmo módulo, inclinados de $45º + \alpha$ e $45º - \alpha$ com $\alpha < 45º$, acima da horizontal . O primeiro projétil apresentará alcance horizontal maior que aquele apresentado pelo segundo.

Uma bola é lançada para cima, em direção que faz um ângulo de 45º com a horizontal, com velocidade **v** . Despreze a resistência do ar. Este enunciado refere-se aos exercícios 21, 22 e 23 :

8) A componente horizontal $\mathbf{v_x}$ da velocidade **v** da bola é:
a) v / cos 45º b) v tg 45º c) v cos 45º d) v sen 45º e) v / sen 45º

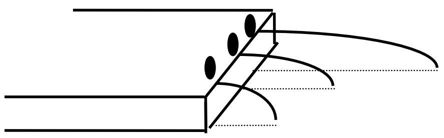
9) A componente $\mathbf{v_y}$ da velocidade **v** da bola:
a) é constante.
b) é função do 1º grau do tempo.
c) é função do 2º grau do tempo.
d) tem o mesmo sentido em qualquer instante.
e) é sempre diferente de zero.

10) A aceleração da bola é:
a) horizontal e variável;
b) inclinada e constante;
c) vertical e constante;
d) inclinada e variável;
e) nula no ponto mais alto atingido pela bola.

11) Durante um exercício de segurança contra incêndio um bombeiro segurou a mangueira d'água formando um ângulo de 45º com a horizontal. Sabendo-se que a aceleração local da gravidade é $g = 10\ m/s^2$ e que a velocidade de saída do jato d'água é de 20 m/s, pode-se afirmar que serão atingidos objetos situados a uma distância horizontal do bico da mangueira de: a) 50 m b) 75 m c) 60 m d) 40 m e) $80\sqrt{2}$ m

12) Um projétil é lançado obliquamente com velocidade inicial de 100 m/s, inclinado com um ângulo θ com a horizontal. Despreza-se a resistência do ar e dados $g = 10\ m/s^2$ e $\text{sen}\ \theta = 0,6$ $\cos\theta = 0,8$, calcule a velocidade do projétil no instante 5s e o tempo para que ele atinja a altura máxima ? (Dar as velocidades nas direções x e y)

13) A figura abaixo mostra três corpos de massas diferentes no instante em que são lançados simultaneamente de uma plataforma com velocidade horizontais $v_1 = 0$, $v_2 = 10$ m/s e $v_3 = 50$ m/s. A altura da plataforma é 1,25 m . Despreze o atrito com o ar e considere $g = 10\ m/s^2$. Quais os tempos de permanência no ar dos três corpos?



14) Um avião deixa cair uma bomba sobre um alvo. Desprezando a resistência do ar, o movimento da projeção da bomba sobre um plano horizontal é , para um observador na Terra:
a) circular uniforme ;
b) retilíneo uniforme ;
c) retilíneo uniformemente variado;
d) retilíneo qualquer ;
e) curvilíneo variado.

15) Uma pequena bola foi rolada numa marquise de 5 m de altura, indo chocar-se com o solo a 4 m da marquise. Despreze a resistência do ar e adote $g = 10\ m/s^2$. Determine:
a) o tempo de queda da bola ;
b) a velocidade v_0 que a bola possuía ao deixar a marquise.

Resp.: 7) 1.V 2.V 3.F 4.V 5.F 6.F 7.V 8.V 9.V 10.F
8) c 9) b 10) c 11)d 12) $v_x = 80$ m/s $v_y = 10$ m/s $v \cong 80,6$ m/s t = 6 s
13) $t_1 = t_2 = t_3 = 0,5$ s 14) b 15) 1 s e 4 m/s