Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Disciplina de Física I Prof. *Nelson Elias*

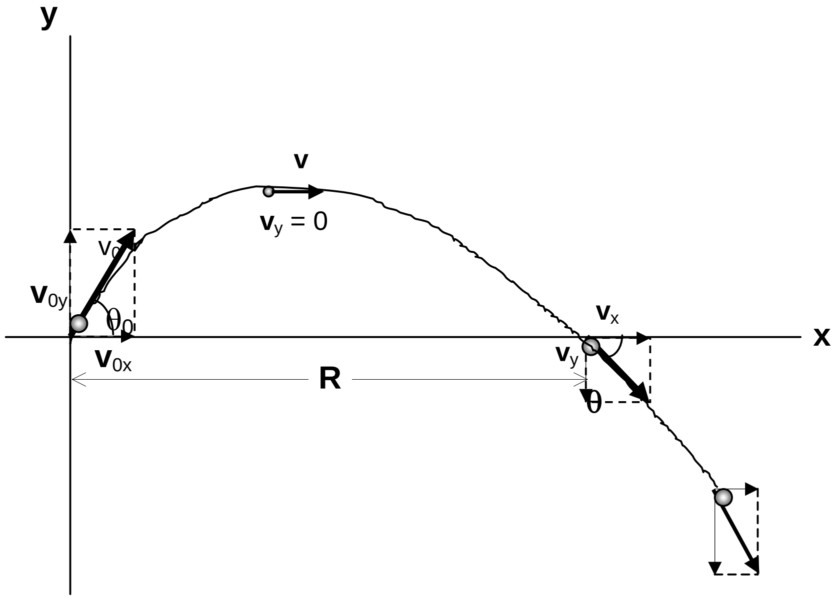
Aluno(a):____ Data:____/____/_____

Notas de Aula cap. 04: Equação da Trajetória.

Nesta aula vamos aplicar as definições e os conceitos de cinemática vetorial adquiridos nas aulas anteriores para escrever as **equações paramétricas da trajetória do lançamento de projéteis.** Lembrando que a trajetória em física, é o lugar geométrico das posições ocupadas por um móvel.O conceito de trajetória está ligado ao conceito de referencial.

Movimento de Projéteis:
É o movimento de uma partícula que executa um movimento bidimensional (horizontal e vertical) com aceleração **g** de queda livre para baixo. Na análise desse movimento desprezaremos os efeitos da resistência do ar. O projétil (a partícula) é lançado em $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ com velocidade inicial, $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\,\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j}$ **.**

- No gráfico abaixo são mostradas a velocidade inicial e as velocidades, com suas componentes, em vários pontos da trajetória.
- A componente horizontal da velocidade permanece constante, ao tempo em que a componente vertical da velocidade varia sob a ação da gravidade.
- O alcance **R** é a distância horizontal do ponto de lançamento, até o ponto em que o projétil volta à mesma altura do lançamento.



O Movimento Horizontal:

Como não existe aceleração na direção horizontal, a componente horizontal da velocidade permanece constante durante o movimento. O deslocamento horizontal $x - x_0$ a partir de uma posição inicial x_0 é dado pela equação:

$$\boxed{x - x_0 = (v_0\cos\theta)t}$$

Movimento Vertical :
O movimento vertical segue a análise do movimento de uma partícula em queda livre. As equações a serem utilizadas são:

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt \qquad v_y^{\,2} = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)^2 - 2g(y - y_0)$$

Onde $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \theta_0$

- **Equação da Trajetória (caminho percorrido pelo projétil):**

$$y = (\tan\theta_0)x - \left(\frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}\right)x^2$$

Alcance Horizontal :

$$R = \frac{v_0^{\,2}}{g}\operatorname{sen} 2\theta_0 \quad \text{Note que R atinge seu valor máximo, quando } \operatorname{sen} 2\theta = 1 \Rightarrow 2\theta = 90^o \text{ e } \theta = 45^o$$

$y =$ *altura final*

$y_0 =$ *altura inicial*

$v_0 =$ *velocidade vertical inicial*

$v_y =$ *velocidade vertical final*

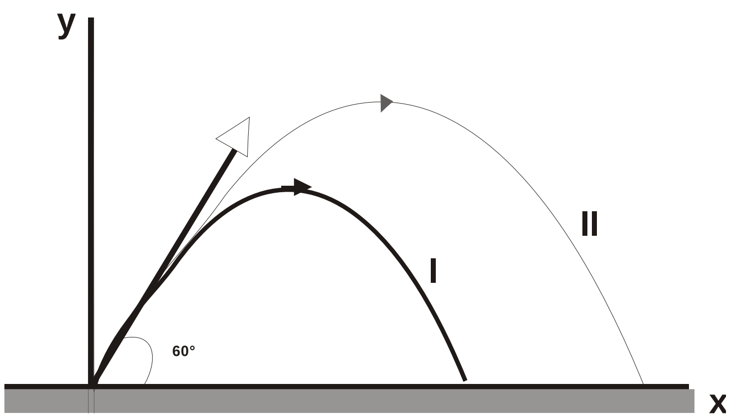
$t =$ *tempo decorrido*

$\theta_0 =$ *ângulo de inclinação de lançamento*

$g =$ *aceleraçâo da gravidade local*

$R =$ *alcance horizontal*

Os Efeitos do Ar



A trajetória das duas bolas

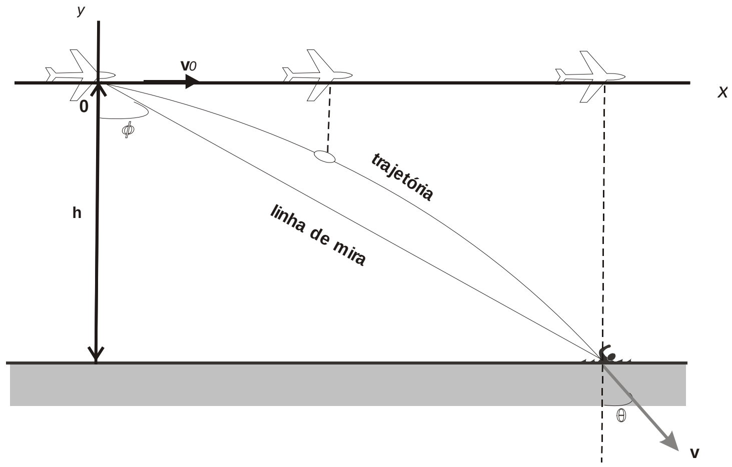
	Trajetória I (Ar)	*Trajetória II (Vácuo)*
Alcance	97 m	175 m
Altura máxima	52 m	75 m
Tempo de percurso	6,6 s	7,9 s

O ângulo de lançamento é de 60° e a velocidade de lançamento é de 160 km/h.

(I) A trajetória do lançamento de uma bola, levando em conta a resistência do ar (calculada por computador).

(II) A trajetória que a bola teria no vácuo, calculada pelos métodos já conhecidos.

Exemplo :
Um avião de salvamento está voando a uma altitude constante de 1.200m à velocidade de 430 km/h, numa trajetória diretamente sobre o ponto em que uma pessoa está se debatendo na água. Em que ângulo ϕ de mira o piloto deve lançar a cápsula de salvamento, para que esta caia bem próximo à pessoa?



A velocidade inicial da cápsula é a mesma do avião. Isto é, a velocidade inicial v_0 é horizontal, e vale 430 km/h. Podemos calcular o tempo de vôo da cápsula,

$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0) - \frac{1}{2}gt^2$ Fazendo y – y_0 = 1.200 m (o sinal menos significa que a pessoa está abaixo da origem) e θ_0 = 0, obtemos: $-1.200m = 0 - \frac{1}{2}(9{,}8m/s^2)t^2$.

Resolvendo para t, achamos $\mathbf{t = \sqrt{\frac{(2)(1.200m)}{9{,}8m/s^2}} = 15{,}65\,s}$.

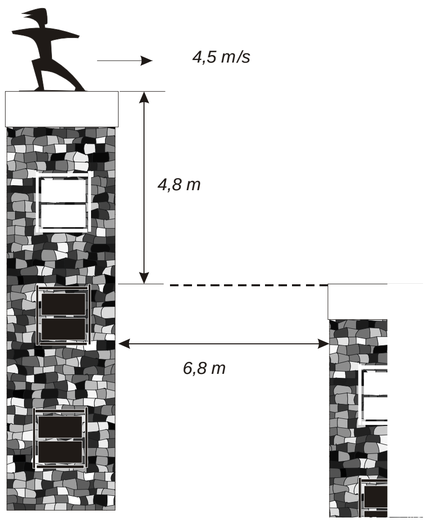
Assim obtemos a distância horizontal percorrida pela cápsula (e pelo avião) durante esse tempo:

$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t$ = (430 km/h) (cos0°) (15,665 s) (1h / 3600 s) = 1,869 km = 1.869 m

Se x_0 = 0, então x = 1.869 m . O ângulo de mira então é $\phi = \tan^{-1}\frac{x}{h} = \tan^{-1}\frac{1869m}{1200m} = 57°$

Como o avião e a cápsula têm a mesma velocidade horizontal, o avião permanece verticalmente sempre sobre a cápsula, enquanto ela estiver voando.

Exemplo : Num filme publicitário, um ator corre pelo telhado de um prédio e salta, na horizontal, para o telhado de outro prédio mais abaixo, conforme mostrado na figura. Antes de tentar o salto, sabiamente quer avaliar se isto é possível. Ele pode realizar o salto se sua velocidade máxima sobre o telhado for de 4,5 m/s ?



Ele levará um tempo para cair 4,8 m, o que pode ser determinado pela equação $y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0) - \frac{1}{2} g t^2$.

Fazendo y – y_0 = - 4,8 m (observe o sinal) e θ_0 = 0, e utilizando a equação dada acima , obtemos

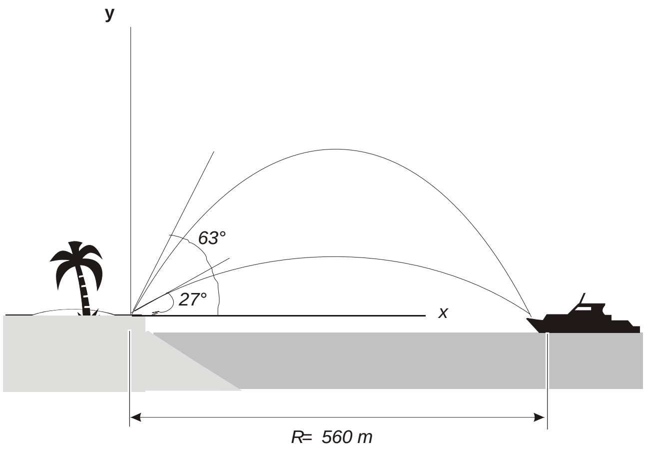
$$t = \sqrt{-\frac{2(y - y_0)}{g}} = \sqrt{-\frac{(2)(-4{,}8m)}{9{,}8m/s^2}} = 0{,}990\, s$$

Agora perguntamos: “ Que distância ele alcançará horizontalmente nesse tempo? ”

$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t$ = (4,5 m/s) (cos 0°) (0,990 s) = 4,5 m

Para alcançar o outro prédio, o homem teria de se deslocar 6,2 m na horizontal. Logo, o conselho que damos ao ator é: “Não salte.”

Canhão de defesa do porto pode atingir o navio pirata....
<u>Exemplo :</u>



Nesta distância, o canhão de defesa do porto pode atingir o navio pirata estando em dois ângulos de elevação diferentes.

A figura mostra um navio pirata ancorado a 560 m de um forte, que defende a entrada de um porto, em uma ilha. O canhão de defesa está localizado ao nível do mar e tem uma velocidade de tiro de 82 m/s.

a) Qual o ângulo de elevação do canhão para atingir o navio pirata ?

Resolvendo a equação $R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0$ para $2\theta_0$, obtemos $2\theta_0 = \operatorname{sen}^{-1} \frac{gR}{v_0^2}$

.

$$2\theta_0 = \operatorname{sen}^{-1} \frac{(9{,}8m/s^2)(560m)}{(82m/s)^2} = \operatorname{sen}^{-1} 0{,}816$$

Há dois ângulos cujo seno é 0,816, ou seja 54,7° e 125,3°.

Logo, achamos $\theta_0 = \frac{1}{2}(54{,}7°) = 27°$ e $\theta_0 = \frac{1}{2}(125{,}3°) = 63°$

O comandante do forte pode ordenar qualquer uma dessas elevações para o canhão atingir o navio pirata (se não houver influência do ar!).

b) Qual o tempo de percurso do projétil, até alcançar o navio, para cada um dos dois ângulos de elevação calculados anteriormente ?

Calculando t para θ_0 = 27°, temos $t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0} = \frac{560m}{(82m/s)(\cos 27°)} = 7{,}7\, s$

Repetindo o cálculo para θ_0 = 63°, obtemos t = 15 s . O que é razoável, pois o tempo de percurso para maiores ângulos de elevação deve ser, também, maior.

c) A que distância do forte deve ficar o navio pirata, para se manter fora do alcance do canhão ?

Vimos que o alcance máximo corresponde a um ângulo de elevação θ_0 de 45° na equação de alcance horizontal, temos $R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0 \; \frac{(82m/s)^2}{9{,}8m/s^2} \operatorname{sen}(2x45°) = 690\, m$

À medida que o navio pirata se afasta, os dois ângulos de elevação com que o navio pode ser atingido se aproxima, tendendo para θ_0 = 45° quando o navio está a 690 m de distância. Além desse ponto, o navio está a salvo.